Zorn の補題・極大原理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2011 年 11 月 20 日

定義. R を集合 x 上の関係とする.

1. R が前順序関係 $\Longleftrightarrow$ R が反射律と推移律を満たす
2. R が順序関係 $\Longleftrightarrow$ R が反射律と反対称律と推移律を満たす
3. R が全順序関係 $\Longleftrightarrow$ R が順序関係で，任意の 2 つの元が比較可能
4. $a \in x$ が極大元 $\Longleftrightarrow$ 全ての $b \in x$ に対し「$aRb \Longrightarrow bRa$」
5. $a \in x$ が最小元 $\Longleftrightarrow$ 全ての $b \in x$ に対し「$a \neq b \Longrightarrow aRb$」
6. $a \in x$ が $y \subset x$ の上界 $\Longleftrightarrow$ 全ての $b \in y$ に対し「$a \neq b \Longrightarrow bRa$」
7. R が整列順序関係 $\Longleftrightarrow$ R が順序関係で，空でない任意の部分集合 $y \subset x$ が最小元を持つ
8. x が有限性を持つ $\Longleftrightarrow$「$a \in x \Longleftrightarrow a$ の任意の有限部分集合 b に対し $b \in x$」

定義. $(x, \leq)$ を順序集合とする.

1. $y \subset x$ が鎖 $\Longleftrightarrow$ $(y, \leq)$ が全順序集合
2. $y \subset x$ が反鎖 $\Longleftrightarrow$ y の任意の異なる 2 元が比較不可能
3. $(x, \leq)$ が木 $\Longleftrightarrow$ 任意の元 $a \in x$ に対し $\{b \in x \mid b \leq a\}$ が鎖になる

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 空でない順序集合 x が「x の鎖には上界が存在する」を満たすならば，x の極大元が存在する．(Zorn の補題)
2. 集合 x 上の推移的関係 R に対し，R によって全順序付けされる極大部分集合が存在する.
3. 任意の集合 x を $\subset$ で順序集合とみなしたとき，x は極大鎖を持つ.

4. 任意の集合 x を $\subset$ で順序集合とみなしたとき, x が「鎖 $y \subset x$ に対し, $\forall a \in y(a \subset b)$ となるような元 $b \in x$ が存在する」を満たすならば，x の極大元が存在する.
5. 有限性をもつ非空集合 x は ($\subset$ に関する) 極大元をもつ．(Tukey の補題)
6. 任意の前順序集合 $(x, \leq)$ は極大鎖を持つ.
7. 任意の順序集合 $(x, \leq)$ は極大鎖を持つ．(Hausdorff's Maximal chain Condition)
8. 任意の順序集合 $(x, \leq)$ の任意の鎖は，x のある極大鎖に含まれる.
9. 任意の木 $(T, \leq)$ は極大鎖を持つ.
10. 任意の前順序集合 $(x, \leq)$ は極大反鎖を持つ.
11. 任意の順序集合 $(x, \leq)$ は極大反鎖を持つ．(Kurepa's Maximal Antichain Condition)

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $A := \{y \subset x \mid (y, R)$ は全順序 $\}$ と定め，$\subset$ で A に順序を入れる．この $(A, \subset)$ は Zorn の補題の仮定を満たす.

$\because$) $C \subset A$ を鎖とし，$z := \bigcup_{y \in C} y$ と置く．まず (z, R) が全順序集合である事を示す.

(i) 反射律

任意の $a \in z$ を取る．z の定義よりある $y \in C$ が有って $a \in y$．よって y の全順序性より aRa.

(ii) 反対称律

$a, b \in z$ に対し aRb かつ bRa であるとする．z の定義と C が鎖であることから $a, b \in y$ となる $y \in C$ の存在が分かる．このとき y の全順序性より $a = b$.

(iii) 推移律

R が推移的関係であることから明らか.

(iv) 比較可能性

$a, b \in z$ を取る．z の定義と C が鎖であることから $a, b \in y$ となる $y \in C$ の存在が分かる．このとき y の全順序性から a と b は比較可能.

以上より (z, R) は全順序である．故に $z \in A$．従って明らかに z は C の上界である.

よって Zorn の補題より極大元が存在するが，これが明らかに求めていたものである.

($2 \Longrightarrow 3$) $\subset$ は推移的だから，仮定 2 より $\subset$ によって全順序付けされる極大部分集合が存在するが，これは明らかに $(x, \subset)$ の極大鎖である.

($3 \Longrightarrow 4$) 仮定 3 より極大鎖 $y \subset x$ が存在する．この鎖 y に 4 の仮定を適用すると

$\forall a \in y(a \subset b)$ となる元 $b \in x$ が取れる．この b が x の極大元である．

$(4 \Longrightarrow 5)$ x が有限性を持つとする．順序集合 $(x, \subset)$ が 4 の仮定を満たすことを示せばよい．

$y \subset x$ を鎖とする．$b := \bigcup_{a \in y} a$ と置けば，$b \in x$ である．

> $\because$) $c \subset b$ を任意の有限部分集合とする．b の定義と c が有限集合であることから $c \subset a_1 \cup a_2 \cup \cdots \cup a_n$ となる $a_i \in y$ が存在する．$(y, \subset)$ が全順序であるから $a := \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ が存在して $c \subset a$ となることが分かる．$a \in y \subset x$，即ち $a \in x$ だから x が有限性を持つ事より $c \in x$.
>
> 従って再び x が有限性を持つ事から $b \in x$ である．

この $b \in x$ は明らかに 4 の仮定 $\forall a \in y(a \subset b)$ を満たす．

$(5 \Longrightarrow 6)$ $A := \{y \subset x \mid y \text{ は鎖}\}$ は空ではない．明らかに A は有限性を持つので，Tukey の補題より極大元を持つ．

$(6 \Longrightarrow 7)$ は明らか．

$(7 \Longrightarrow 8)$ $c \subset x$ を鎖とする．集合 $y := \{a \in x \mid a \text{ は } c \text{ の全ての元と比較可能}\}$ を考える．明らかに $c \subset y$．$(y, \leq)$ は順序集合だから，仮定 7 より極大鎖 $m \subset y$ を持つ．$c \subset m$ である．

> $\because$) $a \in c \setminus m$ が存在すると仮定する．m の極大性より $m \cup \{a\} \subset y$ は鎖ではない．故に $a \in c$ と比較不可能な元 $b \in m \subset y$ が存在するが，それは y の定義に矛盾する．

故に m は鎖 c を含む x の鎖である．鎖 $\widetilde{c} \subset x$ が m を含むとする．すると $c \subset m \subset \widetilde{c}$ だから $\widetilde{c}$ の任意の元は c の元と比較可能，よって $\widetilde{c} \subset y$ である．即ち $\widetilde{c}$ は y の鎖でもある．故に m の極大性より $\widetilde{c} = m$．即ち m は x の極大鎖である．

$(8 \Longrightarrow 9)$ は明らか．(例えば $\emptyset \subset T$ が鎖だから)

$(9 \Longrightarrow 1)$ Zorn の補題と同値な整列可能定理を示す．その為に X を任意の集合とし $T := \{f : \alpha \longrightarrow A \mid \alpha \text{ は順序数で } f \text{ は単射}\}$ と置く．$(T, \subset)$ は木である．よって極大鎖 C を持つ．すると $g := \bigcup_{f \in C} f$ はある順序数から A への単射である．C の極大性から g は全射．故に X は整列可能である．

$(5 \Longrightarrow 10)$ $A := \{y \subset x \mid y \text{ は反鎖}\}$ は空でない．明らかに A は有限性を持つので，Tukey の補題より極大元を持つ．

$(10 \Longrightarrow 11)$ 明らか．

$(11 \Longrightarrow 1)$ Zorn の補題と同値な整列可能定理を示す．その為に，整列可能定理と同値な「全順序集合は整列可能」を示す．

※ 整列可能定理についての定理 1 を参照.

$(X, \leq)$ を全順序集合とする．$A := \{(Y, y) \mid Y \subset X, y \in Y\}$ と置き，A の順序を

$$(Y, y) \leq (Z, z) \Longleftrightarrow Y = Z \text{ かつ } y \leq z$$

で定める．($y \leq z$ は X の順序である．) 仮定 11 より極大反鎖 $C \subset A$ が存在する．X は全順序だから，明らかに $C = \{(Y, f(Y)) \mid Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}\}$ と書ける．この f は $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ の選択関数である．よって選択公理から整列可能定理を導くのと同様にして X が整列可能なことが分かる．

※ 整列可能定理と Zorn の補題の定理 1 を参照.

(を参照)

$\square$

定理 2. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 空でない順序集合 x が「x の鎖には上界が存在する」を満たすならば，x の極大元が存在する．(Zorn の補題)
2. 空でない順序集合 x が「x の鎖には上限が存在する」を満たすならば，x の極大元が存在する．
3. 空でない順序集合 x が「x の部分整列順序集合には上界が存在する」を満たすならば，x の極大元が存在する．
4. 空でない集合 x 上の推移的関係 R が「x の部分集合で R によって全順序付けされるものには上界が存在する」を満たすならば，x の極大元が存在する．
5. 空でない集合 x 上の推移的関係 R が「x の部分集合で R によって整列順序付けされるものには上界が存在する」を満たすならば，x の極大元が存在する．

証明. $(5 \Longrightarrow 4)$ と $(4 \Longrightarrow 2)$ と $(5 \Longrightarrow 3)$ と $(3 \Longrightarrow 2)$ は明らか.

$(2 \Longrightarrow 1)$ Zorn の補題と同値な Tukey の補題 (定理 1 の 5) を示せばよい．その為には x が有限性を持つとき「順序集合 $(x, \subset)$ の鎖には上限が存在する」を満たすことを示せばよい.

$y \subset x$ を鎖とする．$a := \bigcup_{b \in y} b$ と置く．定理 1 の $(4 \Longrightarrow 5)$ の証明と同様に，$a \in x$ が分かる.

明らかに a は y の上界である．$\widetilde{a}$ を y の上界とする．即ち任意の $b \in y$ に対し $b \subset \widetilde{a}$.

$s \in a$ とする．a の定義よりある $b \in y$ が存在して $s \in b$．故に $s \in b \subset \widetilde{a}$．即ち $a \subset \widetilde{a}$ である．従って a は y の最小上界，即ち上限である．

(1 $\Longrightarrow$ 5) Zorn の補題と同値な定理 1 の 2「集合 x 上の推移的関係 R に対し，R によって全順序付けされる極大部分集合が存在する」を仮定して 5 を示す．

$W := \{y \subset x | (y, R)$ は整列順序集合 $\}$ と置く．W 上の関係 S を

$$ySz \Longleftrightarrow y \subset z \text{ かつ } z \cap R^{-1}(y) \subset y$$

と定める．S は推移的である．

∵) ySz かつ zSw であるとする．即ち $y \subset z \subset w, z \cap R^{-1}(y) \subset y, w \cap R^{-1}(z) \subset z$．よって $y \supset z \cap R^{-1}(y) \supset (w \cap R^{-1}(z)) \cap R^{-1}(y) = w \cap R^{-1}(y)$．故に ySw.

仮定 (定理 1 の 2) より S によって全順序付けされる極大部分集合 $N \subset W$ が存在する．$u := \bigcup_{y \in N} y$ とする．(u, R) は順序集合である．

任意の $v(\neq \emptyset) \subset u$ を取る．するとある $y \in N$ について $v \cap y \neq \emptyset$ である．$y \in N \subset W$ だから，(y, R) は整列順序．よって $a := (v \cap y$ の最小元$)$ が存在する．この a は v の最小元でもある．

∵) $b \in v, b \neq a$ とする．

(i)$b \in y$ の時．aRb である．

(ii)$b \notin y$ の時．ある $z \in N$ について $b \in z$ となるが，(N, S) は全順序であるから ySz でなければならない．従って $b \notin R^{-1}(y)$ である．$a \in y$ だから $\neg bRa$ である．$a, b \in z$ で (z, R) が全順序であることから aRb であることが分かる．

(i)(ii) より a は v の最小元である．

よって，u の空でない任意の部分集合は最小元を持つ事，即ち (u, R) は整列順序集合である事が分かる．故に $u \in W$．この u は (W, S) の極大元である．

∵) $z \in W$ が uSz を満たすとする．u の定義から，任意の $y \in N$ に対し ySu，よって ySz．即ち $N \cup \{z\}$ は (W, S) の全順序部分集合である．N の極大性から $N = N \cup \{z\}$，従って $z \in N$，よって zSu となる．即ち u は極大元.

$(u, R) \subset x$ は整列順序だったから，5 の仮定より u の上界 $s \in x$ が存在する．

$a \in x$ が sRa を満たすとする．勿論 a は u の上界である．aRb となる $b \in u$ が存在する．

∵)「全ての $b \in u$ に対し $\neg aRb$」と仮定する．$u \cup \{a\}$ は R について整列順序．よっ

て $u \in W$ の極大性から $u = u \cup \{a\}$．従って $a \in u$，よって $\neg aRa$ である．一方 s が u の上界であることから aRs であり，ゆえに sRa から aRa．よって矛盾．

よって sRb．すると s が u の上界であることから $b = s$ または bRs であるが，どちらにしても aRs である．従って s が (x, R) の極大元であることが分かった． □

定理 3. Zorn の補題 $\Longleftrightarrow$ 順序集合 X が「下の条件 $(*)$ を満たす任意の $A \subset X$ が上界を持つ」を満たすならば，X は極大元を持つ．

$(*)$ 任意の元 $x, y \in A$ に対し $\{x, y\} \subset A$ は A に上界を持つ．

証明. $(\Longrightarrow)$ X を順序集合とする．$(*)$ を満たす $A \subset X$ が上界を持つとする．$C \subset X$ を任意の鎖とすると鎖は $(*)$ を満たすから，C は上界を持つ．従って Zorn の補題より X は極大元を持つ．

$(\Longleftarrow)$ 選択公理を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする．$X := \{f : \Gamma \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \mid \Gamma \subset \Lambda,\ f(\lambda) \in X_\lambda\}$ と定める．X に $\subset$ で順序を入れる．

$A \subset X$ が $(*)$ を満たすとする．$g := \bigcup_{f \in A} f$ と置く．$\lambda \in \mathrm{dom}(g)$ を取る．$\mathrm{dom}(f_1), \mathrm{dom}(f_2) \ni \lambda$ となる任意の $f_1, f_2 \in A$ を取る．条件 $(*)$ より，$\{f_1, f_2\}$ は A に上界 h を持つ．このとき $h(\lambda) = f_1(\lambda) = f_2(\lambda)$ である．即ち $g(\lambda)$ は一意に定まる．故に $g \in X$．明らかに g は A の上界である．

よって仮定より X は極大元を持つが，それが選択関数である． □

定理 4. Zorn の補題 $\Longleftrightarrow$ 任意の集合 x は次の条件を満たす極大部分集合 $y \subset x$ を持つ．

任意の元 $a, b \in y$ に対して $a \neq b$ または $a \in b$ または $b \in a$

証明. $(\Longrightarrow)$ Tukey の補題 (定理 1 の 5) により明らか．

$(\Longleftarrow)$ 整列可能定理を示す．x を任意の集合として $\mathcal{W} := \{R \subset x \times x \mid$R はある $y \subset x$ を整列する $\}$ と定める．$\mathcal{W}$ に順序関係 leq を次のように定義する．

$$R \leq S \Longleftrightarrow R \subset S \text{ かつ } \mathrm{dom}(R) \times (\mathrm{dom}(S) \setminus \mathrm{dom}(R)) \subset S$$

$\mathcal{W}$ 上の写像 f を

$$f(R) := \{\{R\}\} \cup \{f(S) \mid S \leq R, S \in \mathcal{W}\}$$

で定める．

(i) $f(R) = f(S) \Longleftrightarrow R = S$

∵) $\Longleftarrow$ は明らか．$\Longrightarrow$ を示すためには $\{\{R\}\} \cap \{f(S) \mid S \leq R, S \in \mathcal{W}\} = \emptyset$ を示せばよい．

(ii) $f(R) \in f(S) \Longleftrightarrow R \leq S$

∵) $\Longleftarrow$ は f の定義から明らか．$f(R) \in f(S)$ とする．すると f の定義より $f(R) = \{S\}$ か $f(R) \in \{f(T) \mid T \leq S, T \in \mathcal{W}\}$ のどちらかである．しかし $f(R) = \{S\}$ はありえないから，$f(R) \in \{f(T) \mid T \leq S, T \in \mathcal{W}\}$．即ちある $T \leq S, T \in \mathcal{W}$ によって $f(R) = f(T)$ と書ける．すると (i) により $R = T$ となるから，特に $R \leq S$ である．

集合 $\mathrm{ran}(f)$ に仮定を適用して，$Q \subset \mathrm{ran}(f)$ を得る．$\mathcal{U} := \{R \in \mathcal{W} \mid f(R) \in Q\}$ と定める．(i)(ii) により，$\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$ は「任意の $R, S \in \mathcal{U}$ に対し $R = S$ または $R \leq S$ または $S \leq R$」を満たす極大部分集合である．$U := \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{R \in \mathcal{U}} R$ を考える．明らかに U は $\mathrm{dom}(U) \subset x$ を整列する．

$x \neq \mathrm{dom}(U)$ と仮定する．$s \in x \setminus \mathrm{dom}(U)$ を取る．任意の $R \in \mathcal{U}$ に対し $s \notin \mathrm{dom}(R)$ である．$V := U \cup (\mathrm{dom}(U) \times \{s\}) \cup \{\langle s, s \rangle\}$ と置くと $V \in \mathcal{W}$ である．$\mathcal{U} \cup \{V\}$ を考えると，これは「任意の $R, S \in \mathcal{U} \cup \{V\}$ に対し $R = S$ または $R \leq S$ または $S \leq R$」を満たすから，$\mathcal{U}$ の極大性に矛盾する．よって U は x を整列する． □

定義. x を集合，$R \subset x \times x$ を二項関係とする．

1. $R^{-1} := \{\langle a, b \rangle \in x \times x \mid \langle b, a \rangle \in R\}$
2. $\overline{R} := \{\langle a, b \rangle \in x \times x \mid \langle a, b \rangle \notin R\}$
3. $I := \{\langle a, a \rangle \in x \times x \mid a \in x\}$

定理 5. $\mathrm{M}(n)$ で次の命題を表すとする．

任意の集合 x と $R \subset x \times x$ に対し，下の条件 (n) を満たす極大な $y \subset x$ が存在する．

このとき
Zorn の補題 $\Longleftrightarrow \mathrm{M}(1) \Longleftrightarrow \mathrm{M}(2) \Longleftrightarrow \mathrm{M}(3) \Longleftrightarrow \mathrm{M}(4) \Longleftrightarrow \mathrm{M}(5)$

1. $y \times y \subset R$
2. $y \times y \subset R \cup R^{-1}$
3. $y \times y \subset \overline{R} \cup \overline{R}^{-1}$
4. $y \times y \subset R \cup R^{-1} \cup I$
5. $y \times y \subset \overline{R} \cup \overline{R}^{-1} \cup I$

証明. (Zorn の補題 $\Longrightarrow$ M(1)) $A := \{y \subset x \mid y \times y \subset R\}$ と置けば A は有限性を持つ．ゆえに Zorn の補題と同値な Tukey の補題 (定理 1(5)) より極大元の存在が分かる．

M(1)$\Longrightarrow$M(2) は M(1) で R として $R \cup R^{-1}$ を取ればよい．M(2)$\Longleftrightarrow$M(3) と M(3)$\Longrightarrow$M(4) と M(4)$\Longleftrightarrow$M(5) も同様に明らか．

(M(4)$\Longrightarrow$Zorn の補題) 定理 1 の 7 を示せばよいが，それは M(4) の特別な場合である． □

定理 6. Zorn の補題
$\Longleftrightarrow$ 任意の集合 x，正整数 n，n 項関係 $R \subset x^n$ に対し，$y^n \subset R$ となる極大な $y \subset x$ が存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) $A := \{y \subset x \mid y^n \subset R\}$ が有限性を持つ事から明らか．

($\Longleftarrow$) $n = 2$ とすれば M(1) の成立が分かる． □

定義. 集合 X に対し，二項関係を次のように定義する．

1. $xDy \Longleftrightarrow x \cap y = \emptyset$
2. $xKy \Longleftrightarrow x \subset y$ または $y \subset x$
3. $xJy \Longleftrightarrow x \not\subset y$ かつ $y \not\subset x$ かつ $x \cap y \neq \emptyset$

$R \subset X$ を関係とする．部分集合 $Y \subset X$ が「任意の異なる二元 $x, y \in Y$ に対し xRy」を満たすとき，Y は property R を持つと言う．

定理 7. 関係 R に対し N(R) で次の命題を表すとする．

任意の集合 X は property R を持つような極大部分集合 $Y \subset X$ を含む

このとき
選択公理 $\Longleftrightarrow$ N(D) $\Longleftrightarrow$ N($\bar{D}$) $\Longleftrightarrow$ N(K) $\Longleftrightarrow$ N(J) $\Longleftrightarrow$ N($\bar{J}$)

証明. (選択公理 $\Longrightarrow$ N(J)) Tukey の補題より明らか．

(N(J) $\Longrightarrow$ N($\bar{D}$)) 任意の集合 X をとる．u を「任意の $s, t \in X$ に対し $\langle s, u\rangle \notin t$」を満たすように取り，$s \in X$ に対し $s_u := s \cup \{\langle s, u\rangle\}$ と置く．仮定 N(J) を $\{s_u \mid s \in X\}$ に適用すると，property J を持つ極大部分集合 $S \subset \{s_u \mid s \in X\}$ の存在が分かる．$Y := \{s \in X \mid s_u \in S\}$ と定める．$s, t \in X$，$s \neq t$ とする．定義から $s_u \bar{K} t_u$ である．故に $s_u J t_u \Longleftrightarrow s_u \bar{D} t_u$ が成り立つ．一方，$s_u \cap t_u = s \cap t$ だから $s_u \bar{D} t_u \Longleftrightarrow s \bar{D} t$ となる．即ち $s_u J t_u \Longleftrightarrow s \bar{D} t$，従って $Y \subset X$ は property $\bar{D}$ を持ち極大である．

(N($\bar{D}$) $\Longrightarrow$ N(D)) 任意の集合 X をとる．$s \in X$ に対し $N_s := \{\{s\}\} \cup \{\{s,t\} \mid t \in x,\ sDt\}$ と置く．$s,t \in X,\ s \neq t$ とする．$N_s \bar{D} N_t \Longleftrightarrow sDt$ である．よって仮定 N($\bar{D}$) を $\{N_s \mid s \in X\}$ に適用すれば，N(D) の成立が分かる．

(N(D) $\Longrightarrow$ 選択公理) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を空でない集合の族とする．X_λ は互いに交わらないとしてよい．$X := \{\{\langle 0, v\rangle, \langle 1, \lambda\rangle\} \mid \lambda \in \Lambda,\ v \in X_\lambda\}$ とする．仮定 M(D) を X に適用して, property D を持つ極大部分集合 $Y \subset X$ を得る．$\{\langle 0, v\rangle, \langle 1, \lambda\rangle\} D \{\langle 0, w\rangle, \langle 1, \mu\rangle\} \Longleftrightarrow \lambda \neq \mu$ だから，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\{\langle 0, v_\lambda\rangle, \langle 1, \lambda\rangle\} \in Y$ となるような $v_\lambda \in X_\lambda$ が唯一つ存在する．よって $f(\lambda) := v_\lambda$ が選択関数である．

(選択公理 $\Longrightarrow$ N($\bar{J}$)) Tukey の補題より明らか.

(N($\bar{J}$) $\Longrightarrow$ N(K)) 任意の集合 X をとる．$\bigcup_{s \in X} s$ に含まれない元 u を取り，$s \in X$ に対し $s_u := s \cup \{u\}$ と置く．すると任意の $s,t \in X$ に対し $s_u \bar{D} s_t$ となるから，$s_u \bar{J} t_u \Longleftrightarrow s_u K t_u \Longleftrightarrow sKt$ が分かる．故に仮定 N($\bar{J}$) を $\{s_u \mid s \in X\}$ に適用すれば，N(K) の成立が分かる．

(N(K) $\Longrightarrow$ 選択公理) 明らかに N(K) $\Longleftrightarrow$「定理 1 の 3」である． $\square$

参考文献

[1] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the axiom of choice II, North Holland, 1985.

[2] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[3] 松坂 和夫,『集合・位相入門』，岩波書店，1968 年