集合に関する命題と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 3 月 29 日

定理 1. 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$
$\Longleftrightarrow$ 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で全ての X_λ の濃度が等しいもの，に対して $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$

証明. $\Longrightarrow$ は明らかなので，$\Longleftarrow$ を示せばよい．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の任意の族とする．$Y := \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)^{\mathbb{N}}$ と置く．明らかに $Y \neq \emptyset$ である．$\lambda \in \Lambda$ に対し $F_\lambda : Y \times X_\lambda \longrightarrow Y$ を

$$F_\lambda(f, x)(n) := \begin{cases} x & (n = 0 \text{ のとき}) \\ f(n-1) & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．F は単射だから $|Y \times X_\lambda| \leq |Y|$ となる．$|Y| \leq |Y \times X_\lambda|$ だから Bernstein の定理より $|Y \times X_\lambda| = |Y|$ である．従って仮定から $\prod_{\lambda\in\Lambda}(Y \times X_\lambda) \neq \emptyset$ となり，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ である． □

定理 2. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 集合の順序対からなる族 $\{\langle X_\lambda, Y_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ が，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| = |Y_\lambda|$ を満たしているとする．このとき写像の族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，「各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $f_\lambda : X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda$は全単射」を満たすものが存在する．

証明. $\Longrightarrow$ は明らかなので，$\Longleftarrow$ を示せばよい．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の任意の族とする．$|X_\lambda \times \omega| = |X_\lambda \times \omega \cup \{\emptyset\}|$ であるから，族 $\{\langle X_\lambda \times \omega \cup \{\emptyset\}, X_\lambda \times \omega\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ に仮定を適用して全単射 $f_\lambda : X_\lambda \times \omega \cup \{\emptyset\} \longrightarrow X_\lambda \times \omega$ からなる族を得る．$g(\lambda) := (f_\lambda(\emptyset)$ の第一成分$)$ と置けば，g が選択関数である． □

定理 3. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は全ての X_λ の濃度が等しいとする．このとき写像の族

$\{f_{\lambda,\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ で，「各 $\lambda,\mu\in\Lambda$ に対し $f_{\lambda,\mu}:X_\lambda\longrightarrow X_\mu$は全単射」を満たすものが存在する．

証明. $\Longrightarrow$ は明らかなので，$\Longleftarrow$ を示せばよい．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の任意の族とする．$Y:=(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda)^{\mathbb{N}}$ と置く．明らかに $Y\neq\emptyset$ である．定理 1 と同様にして $|X_\lambda\times Y|=|Y|$ が分かる．また，$|X_\lambda\times Y|=|X_\lambda\times Y\cup\{\emptyset\}|$ も容易に分かる．

$I_0:=\{0\}\times\Lambda,\ I_1:=\{1\}\times\Lambda,\ I:=I_0\cup I_1$ と置き $\langle 0,\lambda\rangle\in I_0$ に対し $Y_{\langle 0,\lambda\rangle}:=X_\lambda\times Y\cup\{\emptyset\}$，$\langle 1,\lambda\rangle\in I_1$ に対し $Y_{\langle 1,\lambda\rangle}:=X_\lambda\times Y$ と定める．族 $\{Y_i\}_{i\in I}$ に仮定を適用して全単射の族 $\{f_{i,j}\}_{i,j\in I}$ を得る．このとき各 $\lambda\in\Lambda$ に対し $F_\lambda:=f_{\langle 0,\lambda\rangle,\langle 1,\lambda\rangle}:X_\lambda\times Y\cup\{\emptyset\}\longrightarrow X_\lambda\times Y$ は全単射である．そこで $g(\lambda):=(F_\lambda(\emptyset)$ の第一成分$)$ と置けば，g が選択関数である． □

定理 4. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の $X\neq\emptyset$ と写像 $F:X\longrightarrow Y$ に対して写像 $G:Y\longrightarrow X$ が存在して $F\circ G\circ F=F$ となる．
3. 任意の全射 $F:X\longrightarrow Y$ に対して，ある $G:Y\longrightarrow X$ が存在して $F\circ G=\mathrm{id}_Y$．
4. 二項関係 $R\subset X\times X$ が「任意の $x\in X$ に対してある $y\in X$ が存在して xRy」を満たすとき，写像 $f:X\longrightarrow X$ で任意の $x\in X$ に対して $xRf(x)$ を満たすものが存在する．

証明. $(1\Longrightarrow 2)$ $X\neq\emptyset,\ F:X\longrightarrow Y$ とする．$Y':=\mathrm{Im}(F)\subset Y$ と置く．各 $y\in Y'$ について $F^{-1}(y)\neq\emptyset$．よって $\{F^{-1}(y)\}_{y\in Y'}$ に選択公理を適用して選択関数 $f:Y'\longrightarrow\displaystyle\bigcup_{y\in Y'}F^{-1}(y)=X$ を得る．$y\in Y'$ に対し $f(y)\in F^{-1}(y)$，即ち $F(f(y))=y$ である．また $X\neq\emptyset$ だから，X から 1 つ元 $a\in X$ が取れる．写像 $G:Y\longrightarrow X$ を

$$G(y):=\begin{cases} f(y) & (y\in Y'\text{のとき})\\ a & (y\notin Y'\text{のとき})\end{cases}$$

と定義すれば，任意の元 $x\in X$ に対し

$$F\circ G\circ F(x)=F(G(F(x)))=F(f(F(x)))=F(x)$$

$(2\Longrightarrow 3)$ $F:X\longrightarrow Y$ を全射とする．$X=\emptyset$ のときは自明なので $X\neq\emptyset$ とする．すると仮定 2 よりある写像 $G:Y\longrightarrow X$ があって $F\circ G\circ F=F=\mathrm{id}_Y\circ F$．よって F の全射性から $F\circ G=\mathrm{id}_Y$ である．

$(3 \Longrightarrow 4)$ 条件を満たす関係 $R \subset X \times X$ を取る．$X = \emptyset$ のときは自明だから，$X \neq \emptyset$ とする．写像 $\pi_1, \pi_2 : R \longrightarrow X$ を $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ $(i = 1, 2)$ で定める．R の条件から π_1 は全射である．よって仮定 3 から，$\pi_1 \circ g = \mathrm{id}_X$ となる写像 $g : X \longrightarrow R$ が存在する．このとき写像 $f := \pi_2 \circ g : X \longrightarrow X$ を取れば任意の $x \in X$ に対して

$$R \ni g(x) = \langle \pi_1(g(x)), \pi_2(g(x)) \rangle = \langle x, f(x) \rangle.$$

$(4 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする．$X := \Lambda \sqcup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と置き，X 上の二項関係 R を

$$aRb \Longleftrightarrow (a \in \Lambda \text{かつ } b \in X_a) \text{ または } a = b \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

で定める．この R に仮定 4 を適用し，写像 $f : X \longrightarrow X$ を得る．このとき明らかに $f|_\Lambda : \Lambda \longrightarrow X$ が選択関数である． $\square$

定理 5. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 任意の集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，互いに素な集合族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して $Y_\lambda \subset X_\lambda$，$\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を満たす．

証明. $(\Longrightarrow)$ $X_\lambda = \emptyset$ となる $\lambda \in \Lambda$ については $Y_\lambda := X_\lambda$ とすれば良いから，初めから $X_\lambda \neq \emptyset$ と仮定してよい．$X := \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と置き，$x \in X$ に対し $A_x := \{\lambda \in \Lambda \mid x \in X_\lambda\} \neq \emptyset$ と定める．$\{A_x\}_{x \in X}$ に選択公理を適用し，選択関数 $f : X \longrightarrow \displaystyle\bigcup_{x \in X} A_x = \Lambda$ を得る．$Y_\lambda := f^{-1}(\lambda)$ とすれば明らかに $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda = X$ かつ $Y_\lambda \cap Y_\mu = \emptyset$ $(\lambda \neq \mu)$ である．$y \in Y_\lambda$ とすると $\lambda = f(y) \in A_y$，即ち $y \in X_\lambda$．よって $Y_\lambda \subset X_\lambda$ となる．

$(\Longleftarrow)$ 定理 4 の条件 3 を示す．$F : A \longrightarrow B$ を全射とする．$a \in A$ に対し $X_a := \{F(a)\}$ と置き，族 $\{X_a\}_{a \in A}$ に仮定を適用して $Y_a \subset X_a$，$\displaystyle\bigcup_{a \in A} Y_a = \bigcup_{a \in A} X_a (= B)$，$Y_a \cap Y_{a'} = \emptyset$ $(a \neq a')$ を満たす $\{Y_a\}_{a \in A}$ を得る．各 $b \in B$ に対して $b \in Y_{G(b)}$ となる $G(b) \in A$ が唯一つ存在する．この写像 $G : B \longrightarrow A$ は $F \circ G = \mathrm{id}_B$ を満たす． $\square$

定理 6. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. A を集合，$B \subset A$ を部分集合，$f : A \longrightarrow B$ を全射とするとき，任意の写像 $g : A \longrightarrow B$ に対してある写像 $h : A \longrightarrow A$ が存在して $g = f \circ h$ となる.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] & B \\ & A \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

3. A を集合，$B \subset A$ を部分集合，$f : A \longrightarrow B$ を全射とするとき，任意の全射 $g : A \longrightarrow B$ に対してある写像 $h : A \longrightarrow A$ が存在して $g = f \circ h$ となる．
4. A を集合，$B \subset A$ を部分集合，$f : A \longrightarrow B$ を全射とする．写像 $g : A \longrightarrow B$ が $g|_B = \mathrm{id}_B$ を満たすとき，ある写像 $h : A \longrightarrow A$ が存在して $g = f \circ h$ となる．

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ 定理 4 の 3 を f に適用して，$f \circ k = \mathrm{id}_B$ となる写像 $k : B \longrightarrow A$ を得る．そこで $h := k \circ g$ と置けば $f \circ h = f \circ k \circ g = \mathrm{id}_B \circ g = g$ である．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, shift left, "f"] & B \arrow[l, dashed, shift left, "k"] \\ & A \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

$2 \Longrightarrow 3$ と $3 \Longrightarrow 4$ は明らか．

$(4 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とする．$X \cap \Lambda = \emptyset$ としてよい．X にも Λ にも含まれない元 $\infty \notin X \cup \Lambda$ を一つ取る．$A := X \cup \Lambda \cup \{\infty\}$，$B := \Lambda \cup \{\infty\}$ として全射 $f : A \longrightarrow B$ を

$$f(a) := \begin{cases} \lambda & (a \in X_\lambda \text{ のとき}) \\ \infty & (a \in \Lambda \text{ のとき}) \\ \infty & (a = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．写像 $g : A \longrightarrow B$ を

$$g(a) := \begin{cases} \infty & (a \in X_\lambda \text{ のとき}) \\ a & (a \in \Lambda \text{ のとき}) \\ \infty & (a = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする．仮定により，ある写像 $h : A \longrightarrow A$ が存在して $g = f \circ h$ となる．このとき $\lambda \in \Lambda$ に対して $\lambda = g(\lambda) = f(h(\lambda))$ だから，f の定義により $h(\lambda) \in X_\lambda$ である．故に $h|_\Lambda$ は $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数である． $\square$

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[2] 田中 尚夫,『選択公理と数学【増訂版】』，遊星社，2005 年

[3] ケネス・キューネン,『集合論-独立性証明への案内』，藤田博司訳, 日本評論社, 2008

[4] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice II, North Holland, 1985.

[5] Perry Smith, Three Propositions Equivalent to the Axiom of Choice, Publ. Inst. Math., 32 (1982), 165–166