

剰余群の完全代表系と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2012年3月5日

定理. 集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$ 」を満たすとき, ある集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $F_\lambda \subset X_\lambda$ かつ $|F_\lambda|$ は奇数」である. (これを OAC と呼ぶ)

$\iff G$ をアーベル群, H を部分群とする. もし G/H の任意の元の位数が 2 以下ならば, G/H の完全代表系が存在する.

証明. (\implies) G をアーベル群, H を部分群として G/H の任意の元の位数が 2 以下であるとする. 仮定を G/H に適応して集合族 $\{F_C\}_{C \in G/H}$ を得る. このとき, $|F_C|$ が奇数であることから $g_C := \sum_{x \in F_C} x \in C$ が分かる. 故に $\{g_C \mid C \in G/H\}$ が完全代表系である.

(\impliedby) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$ 」を満たすとする. これらは互いに素としてよい. V_λ を X_λ で生成される二元体 \mathbb{F}_2 上の線型空間とする. 即ち

$$V_\lambda = \left\{ \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_x x \mid \alpha_x \in \mathbb{F}_2, \text{有限個を除いて } \alpha_x = 0 \right\}$$

である. $V := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ とする. 勿論 V は加法によりアーベル群である. 任意の元 $v \in V$ は $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x}^{(v)} x \right)$ と一意に書ける.

$$H := \left\{ v \in V \mid \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x}^{(v)} = 0 \right\}$$

と置くと $H \subset V$ は部分群である. $\mu \in \Lambda$ に対して

$$G_\mu := \left\{ v \in V \mid \sum_{x \in X_\mu} \alpha_{\mu,x}^{(v)} = 1, \text{任意の } \lambda \neq \mu \text{ に対して } \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x}^{(v)} = 0 \right\}$$

とすれば $G_\mu \in V/H$ となる．明らかに V/H の元の位数は 2 以下だから，仮定により完全代表系 P を取ることができる． $P \cap G_\mu = \{g_\mu\}$ と書く．このとき $F_\lambda := \left\{ x \in X_\lambda \mid \beta_{\lambda,x}^{(g_\mu)} = 1 \right\} \subset X_\lambda$ と置けば明らかに $|F_\lambda|$ は奇数である． \square

the Axiom of Multiple Choice によれば OAC は選択公理と同値であるから，次の系が分かる．

系．次の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. G をアーベル群， H を部分群とすれば， G/H の完全代表系が存在する．
3. G をアーベル群， H を部分群とする．もし G/H の任意の元の位数が 2 以下ならば， G/H の完全代表系が存在する．

OAC と選択公理が同値であることは基礎の公理を使っているから，この系には基礎の公理が使われていることになる．実は， $2 \implies 1$ は基礎の公理を使わずに証明できるのでその証明を書いておく．

証明．選択公理と同値な次の命題を示す．

集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$ 」を満たすとき， Λ 上の関数 f が存在して任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\emptyset \neq f(\lambda) \subsetneq X_\lambda$ かつ $|f(\lambda)| < \infty$ となる．

同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice の定理 2 を参照．

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $|X_\lambda| \geq 2$ を満たす族とする．これらは互いに素としてよい． V_λ を X_λ で生成されるアーベル群とする．即ち

$$V_\lambda = \left\{ \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_x x \mid \alpha_x \in \mathbb{Z}, \text{有限個を除いて } \alpha_x = 0 \right\}$$

である． $V := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ とする．任意の元 $v \in V$ は $v = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x}^{(v)} x \right)$ と一意に書ける．

$$H := \left\{ v \in V \mid \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x}^{(v)} = 0 \right\}$$

と置くと $H \subset V$ は部分群である． $\mu \in \Lambda$ に対して

$$G_\mu := \left\{ v \in V \mid \sum_{x \in X_\mu} \alpha_{\mu,x}^{(v)} = 1, \text{任意の } \lambda \neq \mu \text{ に対して } \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x}^{(v)} = 0 \right\}$$

とすれば $G_\mu \in V/H$ となる . 仮定により V/H の完全代表系 P を取ることができる . $P \cap G_\mu = \{g_\mu\}$ として $f(\mu) := \{x \in X_\mu \mid \alpha_{\mu,x}^{(g_\mu)} > 0\} \subset X_\mu$ と定める . 明らかに $|f(\mu)| < \infty$ である . また $g_\mu \in G_\mu$ であることから $f(\mu) \neq \emptyset$ が分かる . 更に $|X_\mu| \geq 2$ だから $f(\mu) \subsetneq X_\mu$ となり , 証明が終わった . \square

参考文献

- [1] K. Keremedis, Some equivalents of AC in algebra II, Algebra Universalis Volume 39 (1998), 163–169, <http://www.springerlink.com/content/2bpybyhldh7cf1cq/>