Nielsen-Schreier の定理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 1 月 11 日

命題 (Nielsen-Schreier の定理)**.** 自由群の部分群は自由群である．

Nielsen-Schreier の定理は ZF で証明できない．(Nielsen-Schreier の定理から「有限集合の族についての選択公理」が導かれることが知られている．また，Nielsen-Schreier の定理が選択公理を導くかどうかは未解決問題のようだ．) 一方，Nielsen-Schreier の定理に条件を付け加えると選択公理と同値になることが知られている．ここではそれを証明する．

G を集合 X で生成される自由群とする．部分集合 $A \subset G$ に対し $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$ と表す．任意の $z \in G$ は $a_1, \cdots, a_n \in X \cup X^{-1}$ を使って

$$z = a_1 \cdots a_n \quad (a_1 \neq a_2^{-1}, \cdots, a_{n-1} \neq a_n^{-1})$$

と一意に書ける．そこで，この表現に現れる非負整数 n を z の長さといい $L(z)$ で表す．

定義. G を集合 X で生成される自由群とし，$A \subset G$ を部分集合とする．

1. A で生成される (G の) 部分群を $\langle A \rangle$ と書く．
2. 以下の条件を満たす A をレベル (level) ということにする．
   - $\langle A \rangle$ は A で生成される自由群である．
   - 任意の $b \in \langle A \rangle$ に対し $b \in \langle \{a \in A \mid L(a) \leq L(b)\} \rangle$ である．
3. 以下の条件を満たす A を Nielsen 集合ということにする．
   - $A \cap A^{-1} = \emptyset$
   - $a, b \in A \cup A^{-1}$ かつ $L(ab) < L(a)$ ならば $b = a^{-1}$
   - $a, b, c \in A \cup A^{-1}$ かつ $L(abc) \leq L(a) - L(b) + L(c)$ ならば $b = a^{-1}$ または $c = b^{-1}$

補題. Nielsen 集合はレベルである．

証明. 略 ([3] を参照)． □

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. G を集合 X で生成される自由群とする．任意の部分群 $H \subset G$ は，ある Nielsen 集合 $A \subset G$ で生成される自由群になる．
3. G を集合 X で生成される自由群とする．任意の部分群 $H \subset G$ は，あるレベル $A \subset G$ で生成される自由群になる．

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ 略 ([3] を参照)．

$(2 \Longrightarrow 3)$ 補題 (Nielsen 集合はレベル) により明らか．

$(3 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$\Lambda \cap \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \emptyset$ としてよい．$X := \Lambda \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で生成される自由群を G とする．$H \subset G$ を $\{x\lambda^3 \mid \lambda \in \Lambda,\ x \in X_\lambda\}$ で生成される部分群とすると，仮定 3 により H はあるレベル $A \subset G$ で生成される自由群である．

$\lambda \in \Lambda$ とする．ある $x \in X_\lambda$ が一意に存在して $x\lambda^3 \in A \cup A^{-1}$ となる．

$\because$) まず存在を示す．$X_\lambda \neq \emptyset$ だから，元 $y \in X_\lambda$ が取れる．$y\lambda^3 \in H = \langle A\rangle$ で，A はレベルだから $y\lambda^3 \in \langle\{a \in A \mid L(a) \leq 4\}\rangle$ となる．故に $L(a_0) \leq 4$ なる $a_0 \in A \cup A^{-1}$ で λ が現れるようなものが存在する．H は長さが偶数の元で生成されているから，a_0 の長さも偶数である．よって $L(a_0) = 2$ または $L(a_0) = 4$．H の生成の仕方から，λ が現れるときには 3 つ同時に現れなければならないから，$L(a_0) = 4$ が分かる．H の生成の仕方から，ある $x \in X_\lambda$ も a_0 に現れなければならない．従って $a_0 = x\lambda^3$, $a_0 = \lambda x\lambda^2$, $a_0 = \lambda^2 x\lambda$, $a_0 = \lambda^3 x$ の 4 通りのうちのどれかである．しかし H の生成の仕方から $a_0 = x\lambda^3$ 以外はありえない．故に $x\lambda^3 = a_0 \in A \cup A^{-1}$ となる．

次に一意性を示す．その為に $x, y \in X_\lambda$, $x \neq y$, $x\lambda^3, y\lambda^3 \in A \cup A^{-1}$ と仮定する．$xy^{-1} = (x\lambda^3)(y\lambda^3)^{-1} \in H = \langle A\rangle$ であり，A はレベルだから $xy^{-1} \in \langle\{a \in A \mid L(a) \leq L(xy^{-1})\}\rangle$ しかし $L(xy^{-1}) = 2$ だから $x\lambda^3, y\lambda^3 \notin \{a \in A \mid L(a) \leq L(xy^{-1})\}$ となり矛盾．

そこで $f(\lambda) := (x\lambda^3 \in A \cup A^{-1}$ となる唯一つの $x \in X_\lambda)$ と定めれば f が選択関数である． □

参考文献

[1] Paul E. Howard, Subgroups of a Free Group and the Axiom of Choice, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 50, No. 2 (1985), 458–467, `http://www.jstor.org/pss/2274234`

[2] Paul E. Howard, the Existence of Level Sets in a Free Group implies the Axiom of Choice, Mathematical Logic Quarterly 33(1987), pp315–316, `http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/malq.19870330406/abstract`

[3] H. Federer and B. Jónsson, Some Properties of Free Groups, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 1–27, `http://www.ams.org/journals/tran/1950-068-01/S0002-9947-1950-0032643-4/`

[4] Benjamin Debeerst, A Topological Proof of the Nielsen-Schreier Theorem, Projektarbeit, 23. Mai 2010., `http://benjamino.debeerst.eu/uni.htm`