# 線型空間と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2011 年 11 月 14 日

**定理 1.** 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の線型空間に基底が存在する

**証明.** ($\Longrightarrow$) $V$ を任意な線型空間とする．$X := \{A \subset V \mid A$ は一次独立 $\}$ とする．一次独立の定義から，$X$ は明らかに有限性を持つ．よって Tukey の補題により $X$ は極大元 $B$ を持つ．

| |
|---|
| ※ Tukey の補題とは「有限性を持つ集合は ($\subset$ についての) 極大元を持つ」という選択公理と同値な命題のこと．Zorn の補題・極大原理を参照. |

$B$ が $V$ を生成しないと仮定する．すると $B$ の元の一次結合で表せないような元 $v \in V$ が存在するが，この時 $B \subsetneq B \cup \{v\} \in X$ となり，$B$ の極大性に矛盾する．よって $B$ は $V$ を生成する，即ち $V$ の基底である．

($\Longleftarrow$) 選択公理と同値な AMC を示す．

| |
|---|
| ※ AMC (= the Axiom of Multiple Choice) とは次の命題のこと．<br>空でない集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対し，空でない有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で<br>$\forall\lambda \in \Lambda, F_\lambda \subset X_\lambda$ を満たすものが存在する．<br>同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice を参照. |

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない集合の族とする．各 $X_\lambda$ は互いに交わらないとしてよい．$k$ を体とし，$X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を不定元の集合とみなして有理関数体 $k(X)$ を考える．

単項式 $a = \alpha x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n} \in k(X)$ に対し，$I_\lambda(a) := \{1 \leq i \leq n \mid x_i \in X_\lambda\}$ と置き，$\lambda\text{-deg}(a) := \sum_{i\in I_\lambda(a)} e_i$ を $\lambda$-次数と呼ぶことにする．各項の $\lambda$-次数が $m$ の多項式を $m$ 次の $\lambda$-斉次多項式と呼ぶことにし，その次数も $\lambda$-deg で表すことにする．$f \in k(X)$ が $f = \dfrac{g}{h}$ ($g, h$ は $\lambda$-斉次多項式，$\lambda\text{-deg}(g) = \lambda\text{-deg}(h) + d$) と表せるとき，$f$ を d 次の $\lambda$-斉次式と呼ぶことにする．

さて，$K := \{ f \in k(X) \mid \forall\lambda \in \Lambda$ に対し $f$ は 0 次の $\lambda$-斉次式 $\}$ は $k(X)$ の部分体．よって $k(X)$ は $K$ 上の線型空間とみなせる．$V := \langle X \rangle$ を $X$ で $K$ 上生成される $k(X)$ の部分空間とする．仮定より $V$ は $K$ 上の基底をもつ．それを $B$ と書く．

さて，$\lambda \in \Lambda$ とする．$X_\lambda \subset V$ の任意の元 $x$ は

$$x = \sum_{b \in B(x)} \alpha_b(x) b \quad (B(x) \subset B \text{ は有限集合}, \alpha_b(x) \in \ K^\times)$$

と一意に表される．他の元 $y \in X_\lambda$ も同様に $y = \sum\limits_{b \in B(y)} \alpha_b(y) b$ と書くと

$$y = \left(\frac{y}{x}\right) x = \sum_{b \in B(x)} \left(\frac{y}{x} \alpha_b(y)\right) b$$

となる．表現の一意性から $B(x) = B(y)$，$\dfrac{\alpha_b(x)}{x} = \dfrac{\alpha_b(y)}{y}$ である．即ち，$B(x)$ と $\dfrac{\alpha_b(x)}{x}$ は $x \in X_\lambda$ によらずに $\lambda$ から定まる．そこで $B_\lambda := B(x)$，$\beta_{b,\lambda} := \dfrac{\alpha_b(x)}{x}$ と書く．

$\alpha_b(x) \in K$ だから $\beta_{b,\lambda}$ は $-1$ 次の $\lambda$-斉次式である．よって，$\beta_{b,\lambda}$ を既約分数で表す事にすると，分母には必ず $X_\lambda$ の元が現れる．故に

$$F_\lambda := \{ x \in X_\lambda \mid \exists b \in B_\lambda, x \text{ は} \beta_{b,\lambda} \text{の分母に現れる} \}$$

と置けば各 $F_\lambda \subset X_\lambda$ は空でない有限部分集合である．よって AMC が成立する． □

体 $k$ と集合 $X$ に対し，$k^{(X)}$ で $X$ を基底とする $k$-線型空間を表す．

**定理 2.** $k$ を体とするとき
選択公理
$\Longleftrightarrow$ 任意の $k$-線型空間 $V$ とその部分空間 $A$ に対し，$A$ の補空間 $B$ が存在する．
( 即ち，$A \oplus B = V$ となる $B$．)

**証明.** $(\Longrightarrow)$ $X := \{ W \subset V : \text{部分空間} \mid A \cap W = 0 \}$ に Zorn の補題を適用すればよい．

$(\Longleftarrow)$ AMC を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を空でない集合の族とする．各 $X_\lambda$ は互いに交わらないとしてよい．$X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ とする．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$A_\lambda := \left\{ \sum_{x \in X_\lambda} a(x) x \in k^{(X_\lambda)} \,\middle|\, \sum_{x \in X_\lambda} a(x) = 0 \right\}$$

と定義する．$A := \bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigoplus\limits_{\lambda \in \Lambda} k^{(X_\lambda)} = k^{(X)}$ に仮定を適用すると $A \oplus B = k^{(X)}$ となる部分空間 $B \subset k^{(X)}$ が存在する．

$x \in X_\lambda$ を $x \in k^{(X)}$ とみなして $x = a(x) + b(x)$ $(a(x) \in A,\ b(x) \in B)$ と表す．任意の $x, y \in X_\lambda$ をとる．$x - y \in A$ に注意すると

$$b(x) - b(y) = (x - a(x)) - (y - a(y)) = (x - y) - a(x) + a(y) \in A$$

となるから $b(x) - b(y) \in A \cap B = 0$，即ち $b(x) = b(y)$ である．従って，$b_\lambda := b(x)$ は $x \in X_\lambda$ の取り方によらず $\lambda$ のみから定まる．$b_\lambda \in B \subset k^{(X)}$ なので, $b_\lambda = \sum_{y \in X} \alpha_\lambda(y) y$ と一意に表せる．そこで $F_\lambda := \{y \in X_\lambda \mid \alpha_\lambda(y) \neq 0\}$ と置く．$\sum_{y \in X} \alpha_\lambda(y) y$ は実質有限和だから $F_\lambda$ も有限集合である．また，$x \in X_\lambda$ に対し

$$x - \sum_{y \in X} \alpha_\lambda(y) y = x - b_\lambda = x - b(x) = a(x) \in A = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

であるが，$x - \sum_{y \in X} \alpha_\lambda(y) y$ の $A_\lambda$ 成分は明らかに $x - \sum_{y \in X_\lambda} \alpha_\lambda(y) y$．$A_\lambda$ の定義より $1 - \sum_{y \in X_\lambda} \alpha_\lambda(y) = 0$，故に $\alpha_\lambda(y) \neq 0$ となる $y \in X_\lambda$ は存在する．即ち $F_\lambda$ は空でない．よって AMC が成立する． $\square$

**定理 3.** 選択公理
$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{Q}$-線型空間の生成系は基底を含む.

**証明.** $(\Longrightarrow)$ 省略.

$(\Longleftarrow)$ AMC を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を空でない集合の族とする．各 $X_\lambda$ は 3 つ以上元を持つとしても一般性を失わない．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\mathbb{Q}$-線型空間 $V_\lambda$ を

$$V_\lambda := \{f : X_\lambda \longrightarrow \mathbb{Q} \mid \text{ある有限集合 } F \subset X_\lambda \text{があって } f \text{ は } X_\lambda \setminus F \text{ 上定数関数 }\}$$

と定義する．$G_\lambda := \{f \in V_\lambda \mid f \text{ は定数関数ではないが一点を除くと定数関数 }\}$ と置けば $G_\lambda$ は $V_\lambda$ を生成する．

$V := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ とする．$i_\lambda : V_\lambda \hookrightarrow V$ を標準的な埋め込みとして, $G := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda(G_\lambda)$ と置けば $G$ は $V$ を生成する．そこで仮定より $V$ の基底 $B \subset G$ が存在する．$B_\lambda := \{x \in V_\lambda \mid i_\lambda(x) \in G\}$ とすれば $B_\lambda \subset G_\lambda$ が $V_\lambda$ の基底である．

定数関数 $1 \in V_\lambda$ を基底 $B_\lambda$ の元 $b_i$ の一次結合で表す: $1 = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_n b_n$．$b_i \in G_\lambda$ で，$X_\lambda$ は 3 つ以上の元を持つから，$b_i : X_\lambda \longrightarrow \mathbb{Q}$ が $X_\lambda \setminus \{x_i\}$ 上定数関数になるような $x_i$ が唯一つ存在する．そこで $F_\lambda := \{x_1, \cdots, x_n\}$ とすればよい． $\square$

**定義.** $R$ を環とし，$M$ を $R$-加群とする．

(1) $M$ が入射的 (injective)
$\Longleftrightarrow$ $R$-加群の任意の単射準同型 $f : L \longrightarrow N$ と任意の準同型 $g : L \longrightarrow M$ に対し

準同型 $h : N \longrightarrow M$ が存在して $g = h \circ f$ となる．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(2) $M$ が射影的 (projective)
$\Longleftrightarrow$ $R$-加群の任意の全射準同型 $f : N \longrightarrow L$ と任意の準同型 $g : M \longrightarrow L$ に対し準同型 $h : M \longrightarrow N$ が存在して $g = f \circ h$ となる．

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] & L \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[u, "g"'] & \end{tikzcd}$$

**定理 4.** $k$ を体とするとき，次の命題は同値

(1) 選択公理
(2) $k$-線型空間は入射的
(3) $k$-線型空間は射影的
(4) 基底を持つ $k$-線型空間は射影的

**証明.** (1)$\Longrightarrow$(2) $k$-線型空間 $V$ が入射的であることを示す．任意の単射線型写像 $f : U \longrightarrow W$ と任意の線型写像 $g : U \longrightarrow V$ を取る．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

$f$ により $U \subset W$ を部分空間とみなし，定理 2 を使うと $W = U \oplus U'$ と書ける．そこで $h : W \longrightarrow V$ を合成 $W = U \oplus U' \longrightarrow U \xrightarrow{g} V$ で定めればよい．

(2)$\Longrightarrow$(1) 定理 2 の条件 (補空間の存在) を示す．$V$ を $k$-線型空間とし $A \subset V$ を部分空間とする．仮定 (2) より $A$ は入射的である．故に，次の図式を可換にする線型写像 $f : V \longrightarrow A$ を得る．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\subset"] \arrow[d, "\mathrm{Id_A}"'] & V \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

$B := \ker f$ とすれば $A \oplus B = V$.

(1)$\Longrightarrow$(3) $k$-線型空間 $V$ が射影的であることを示す．任意の全射線型写像 $f : U \longrightarrow W$ と任意の線型写像 $g : V \longrightarrow W$ を取る．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] & W \arrow[r] & 0 \\ & V \arrow[ul, dashed, "h"] \arrow[u, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$V$ の基底 $\{e_i\}$ を取る．(選択公理を仮定しているのでこれは可能．)$f$ が全射であることから，各 $e_i$ に対し $f^{-1}(g(e_i)) \neq \emptyset$ である．よって選択公理により $u_i \in f^{-1}(g(e_i))$ を取ってくることができる．$h(e_i) := u_i$ で線型写像 $h : V \longrightarrow U$ を定義すれば，これは $g = f \circ h$ を満たす．

(3)$\Longrightarrow$(4) は自明.

(4)$\Longrightarrow$(1) AMC を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない集合の族とする．各 $X_\lambda$ は互いに交わらないとしてよい．$X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と置く．$f : X \longrightarrow \Lambda$ を $f(x) := (x \in X_\lambda$ となる $\lambda)$ で定める．$f$ から線型写像 $\overline{f} : k^{(X)} \longrightarrow k^{(\Lambda)}$ が自然に得られる．$f$ が全射だから，$\overline{f}$ も全射である．仮定 (4) より，$k^{(\Lambda)}$ は射影的，よって次の図式を可換にする線型写像 $g : k^{(\Lambda)} \longrightarrow k^{(X)}$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} k^{(X)} \arrow[r, "\overline{f}"] & k^{(\Lambda)} \arrow[r] & 0 \\ & k^{(\Lambda)} \arrow[ul, dashed, "g"] \arrow[u, "\mathrm{Id}_{k^{(\Lambda)}}"'] & \end{tikzcd}$$

$\lambda \in \Lambda$ に対し $g(\lambda) = \displaystyle\sum_{x\in X} a(x,\lambda)x$ と一意に表す．この表示を使って

$$F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid a(x,\lambda) \neq 0\}$$

と置く．$\displaystyle\sum_{x\in X} a(x,\lambda)x$ は有限和だから $F_\lambda$ も有限集合である．また

$$\begin{aligned} \lambda = \mathrm{Id}_{k^{(\Lambda)}}(\lambda) = \overline{f}(g(\lambda)) = \overline{f}\Big(\sum_{x\in X} a(x,\lambda)x\Big) = \sum_{x\in X} a(x,\lambda)\overline{f}(x) \\ = \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda \lambda \quad (b_\lambda := \sum_{x\in X_\lambda} a(x,\lambda)) \end{aligned}$$

となるから，表現の一意性より $a(x,\lambda) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda$ は存在する．即ち $F_\lambda \neq \emptyset$．故に AMC が成り立つ.

□

## 参考文献


[1] Blass, A. , Existence of bases implies the axiom of choice, Comtemp. , 31 (1984), 31-33, http://www.math.lsa.umich.edu/~ablass/set.html

[2] Horst Herrlich, Axiom of Choice, Springer, 2006