Lebesgue 非可測集合の存在

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2011 年 11 月 14 日

命題 (Lebesgue 測度の性質)**.** $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度を μ で表すことにする．

(1) E, F が可測集合で $E \subset F$ となるとき $\mu(E) \leq \mu(F)$

(2) 互いに交わらない可測集合 $E_1, E_2, \cdots$ に対し $\mu\Bigl(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Bigr) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$

(3) 可測集合 E と実数 x に対し $E+x := \{y+x \mid y \in E\}$ と置くとき $\mu(E+x) = \mu(E)$

(4) $\mu(\mathbb{R}) = \infty$

これらの性質と選択公理を使って，非可測集合が存在することを示す．

定理. Lebesgue 非可測集合 ($\subset \mathbb{R}$) が存在する．

証明. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ を考える．

> ※ $\mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を
> $$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$
> で定義する．この時 $\mathbb{R}/\mathbb{Q} := \mathbb{R}/\sim$ である．

$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の元は $\mathbb{R}$ の部分集合である．同値類の性質より，これらの元は互いに交わらない．よって選択公理により各元 $A \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ から 1 つずつ実数 $x(A)$ を選べる．この時，$A \cap [0,1] \neq \emptyset$ だから，$x(A) \in [0,1]$ となるように選ぶことができる．

> ※ 正確に言えば，集合 $X := \{[0,1] \cap A \mid A \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$ に選択公理を適用するということ．

$V := \{x(A) \mid A \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\}$ とおく．$x(A)$ の選び方により $V \subset [0,1]$.

V が Lebesgue 可測だと仮定する．正整数 k に対し $V_k := V + \frac{1}{k}$ と置く．Lebesgue 測度の性質により $\mu(V) = \mu(V_k)$．また，$k \neq l$ ならば $V_k \cap V_l = \emptyset$ である．

$\because$) $x \in V_k \cap V_l$ とするとある実数 $y, z \in V$ が有って $x = y + \frac{1}{k} = z + \frac{1}{l}$．よって $y - z \in \mathbb{Q}$ だから V の定義より $y = z$，よって $\frac{1}{k} = \frac{1}{l}$ である．即ち $k = l$.

また，明らかに $V_k \subset [0, 2]$ である．故に正整数 n に対し

$$n\mu(V) = \sum_{k=1}^{n} \mu(V_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} V_k\Big) \leq \mu([0, 2]) = 2.$$

n はいくらでも大きく取れるから $\mu(V) = 0$ でなければならない．

さて，V の定義より $\mathbb{R} = \bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + q)$ と書けるが，$\mathbb{Q}$ は可算集合だから

$$\infty = \mu(\mathbb{R}) = \mu\Big(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (V + q)\Big) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \mu(V + q) = \sum 0 = 0$$

となり矛盾する．故に V は Lebesgue 非可測である． $\square$

参考文献

[1] 田中 尚夫,『選択公理と数学【増訂版】』，遊星社，2005 年