

# 入射的・射影的と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2012年3月15日

定義.  $C$  を圏とする .

1. 対象  $I \in C$  が入射的 (injective)  
 $\iff$  関手  $\text{Hom}_C(-, I)$  が単射を全射に送る
2. 対象  $P \in C$  が射影的 (projective)  
 $\iff$  関手  $\text{Hom}_C(P, -)$  が全射を全射に送る (全射を保つ)
3.  $C$  が十分に多くの入射的对象を持つ (enough injective)  
 $\iff$  任意の対象  $X \in C$  に対し, ある入射的对象  $I \in C$  と単射  $f: X \rightarrow I$  が存在する . これを  $\text{EI}(C)$  で表す .
4.  $C$  が十分に多くの射影的对象を持つ (enough projective)  
 $\iff$  任意の対象  $X \in C$  に対し, ある射影的对象  $P \in C$  と全射  $f: P \rightarrow X$  が存在する . これを  $\text{EP}(C)$  で表す .

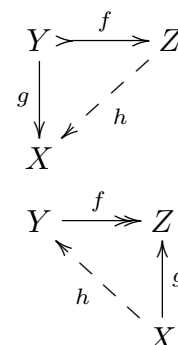
例. 集合と写像のなす圏 Sets の場合 .

集合  $X$  が入射的

$\iff$  任意の単射  $f: Y \rightarrow Z$  と任意の写像  $g: Y \rightarrow X$  に対しある写像  $h: Z \rightarrow X$  が存在して  $g = h \circ f$  となる .

集合  $X$  が射影的

$\iff$  任意の全射  $f: Y \rightarrow Z$  と任意の写像  $g: X \rightarrow Z$  に対しある写像  $h: X \rightarrow Y$  が存在して  $g = f \circ h$  となる .



命題.  $\text{EI}(\text{Sets})$  である .

証明. 任意の空でない集合が入射的だからである .

□

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値 .

1. 選択公理
2. 任意の集合は射影的 .
3. 任意の集合  $X$  に対して , 射影的な集合  $Y$  が存在して  $X \subset Y$  .

証明. (1  $\implies$  2)  $X$  を任意の集合とする .

任意の全射  $f : Y \twoheadrightarrow Z$  と任意の写像  $g : X \rightarrow Z$  を取る .  $f$  が全射だから各  $x \in X$  に対し  $f^{-1}(g(x))$  は空でない . そこで  $\{f^{-1}(g(x))\}_{x \in X}$  に選択公理を適用して選択関数  $h : X \rightarrow \bigcup_{x \in X} f^{-1}(g(x)) \subset Y$  を得る .

すると ,  $h(x) \in f^{-1}(g(x))$  だから  $f \circ h = g$  である .

(2  $\implies$  3)  $Y = X$  とすればよいから明らか .

(3  $\implies$  1) 全射の右逆写像の存在を示す .  $f : X \twoheadrightarrow Y$  を全射とする . 仮定 2 により , 射影的な集合  $Z$  で  $Y \subset Z$  となるものが存在する .  $a \in Y$  を一つ取る . 写像  $g : Z \rightarrow Y$  を

$$g(z) := \begin{cases} z & (z \in Y \text{ のとき}) \\ a & (z \notin Y \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める .  $i : Y \rightarrow Z$  を包含写像とすれば明らかに  $g \circ i = \text{id}_Y$  である .  $Z$  が射影的だから , ある写像  $h : Z \rightarrow X$  が存在して  $f \circ h = g$  を満たす . このとき  $k := h \circ i : Y \rightarrow X$  と置けば  $f \circ k = f \circ h \circ i = g \circ i = \text{id}_Y$  である . □

例.  $R$  を可換環とし ,  $R$ -加群と  $R$ -準同型のなす圏  $R\text{-Mod}$  を考える .

$R$ -加群  $M$  が入射的

$\iff$  任意の単射準同型  $f : L \rightarrow N$  と任意の準同型  $g : L \rightarrow M$  に対し , ある準同型  $h : N \rightarrow M$  が存在して  $g = h \circ f$  となる .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & N \\ & & \downarrow g & \nearrow h & \\ & & M & & \end{array}$$

$R$ -加群  $M$  が射影的

$\iff$  任意の全射準同型  $f : N \rightarrow L$  と任意の準同型  $g : M \rightarrow L$  に対し , ある準同型  $h : M \rightarrow N$  が存在して  $g = f \circ h$  となる .

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{f} & L & \longrightarrow & 0 \\ & \nearrow h & \uparrow g & & \\ & & M & & \end{array}$$

$R$ -加群の完全列  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  に対し

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}_R(C, M) \rightarrow \text{Hom}_R(B, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M) \\ 0 &\rightarrow \text{Hom}_R(M, A) \rightarrow \text{Hom}_R(M, B) \rightarrow \text{Hom}_R(M, C) \end{aligned}$$

は完全列 . よって

$M$  が入射的  $\iff$  関手  $\text{Hom}_R(-, M)$  が完全 ( $\iff$  完全列を完全列に送る)

$M$  が射影的  $\iff$  関手  $\text{Hom}_R(M, -)$  が完全

アーベル群と群準同型のなす圏  $\mathbf{Ab}$  を考える . ( $\mathbf{Ab} = \mathbb{Z}\text{-Mod}$  である .) よく知られているように ,  $\text{EI}(\mathbf{Ab})$  と  $\text{EP}(\mathbf{Ab})$  が成立している .  $\text{EP}(\mathbf{Ab})$  のよく知られた証明は

1. 任意のアーベル群  $A$  に対し , 自由アーベル群  $B$  と全射準同型  $f : B \rightarrow A$  が存在する .
2. 自由アーベル群は射影的

という手順で与えられる .  $\text{EI}(\mathbf{Ab})$  の証明も同じように

1. 任意のアーベル群  $A$  に対し , 可除アーベル群  $B$  と単射準同型  $f : A \rightarrow B$  が存在する .
2. 可除アーベル群は入射的

という手順で与えられる .

$R$ -加群  $M$  が可除  $\iff$  任意の  $x \in M$  が可除元 .

$x \in M$  が可除元  $\iff$  任意の非零因子  $r \in R$  に対してある  $y \in M$  が存在して  $x = ry$  となる .

どちらの証明も 1 は選択公理を使わずに (ZF で) できる . 問題は 2 である .

定理 . 次の命題は (ZF 上) 同値

1. 選択公理
2. 任意の可換環  $R$  と  $R$ -加群  $M$  に対して次が成り立つ .

任意のイデアル  $I \subset R$  と任意の準同型  $\varphi : I \rightarrow M$  に対してある準同型  $\psi : R \rightarrow M$  が存在して  $\psi|_I = \varphi$  となる .  
 $\implies M$  が入射的

3. 任意の単項イデアル整域  $R$  に対して , 可除  $R$ -加群は入射的
4. 可除アーベル群は入射的

証明 . (1  $\implies$  2) 単射準同型  $f : L \rightarrow N$  と準同型  $g : L \rightarrow M$  を取る .  $f$  により  $L \subset N$

とみなす . 集合

$$X := \{(A, h) \mid L \subset A \subset N \text{ は部分加群}, h : A \rightarrow M, h|_L = g\}$$

を考える .  $(L, g) \in X$  だから  $X \neq \emptyset$  である .  $X$  に順序  $\leq$  を

$$(A, h) \leq (B, k) \iff A \subset B, k|_A = h$$

で定めると  $(X, \leq)$  は帰納的順序集合となり , Zorn の補題より極大元  $(A, h) \in X$  が存在する .

$A \subsetneq N$  と仮定する . 元  $x \in N \setminus A$  が取れる .  $B := A + Rx$  と置く .  $I := \{r \in R \mid rx \in A\} \subset R$  はイデアルである . 準同型  $\varphi : I \rightarrow M$  を  $\varphi(r) := h(rx)$  で定める . 仮定から  $\psi : R \rightarrow M$  が存在して  $\psi|_I = \varphi$  である . さて , 準同型  $k : B \rightarrow M$  を任意の  $a \in A$  と  $r \in R$  に対して  $k(a + rx) := h(a) + r\psi(1)$  と定める . これは well-defined である .

∴  $a_0 + r_0x = a_1 + r_1x$  ( $a_0, a_1 \in A, r_1, r_2 \in R$ ) とすると  $(r_0 - r_1)x = a_1 - a_0 \in A$  だから

$$h(a_1 - a_0) = h((r_0 - r_1)x) = \varphi(r_0 - r_1) = \psi(r_0 - r_1) = (r_0 - r_1)\psi(1).$$

故に  $h(a_0) + r_0\psi(1) = h(a_1) + r_1\psi(1)$  である .

このとき  $k|_A = h$  だから  $(A, h) \leq (B, k)$  である . 明らかに  $A \subsetneq B$  だから  $(A, h)$  の極大性に矛盾する . 故に  $A = N$  が分かり ,  $g = h \circ f$  である .

逆「 $M$  が入射的  $\implies \psi|_I = \varphi$  なる  $\psi : R \rightarrow M$  が存在する」は選択公理によらず成り立つ . それは次の図式から明らか .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \subset & R \\ & & \downarrow \varphi & \searrow \psi & \\ & & M & & \end{array}$$

(2  $\implies$  3)  $R$  を単項イデアル整域 ,  $M$  を可除  $R$ -加群とする . 任意のイデアル  $I \subset R$  と任意の  $\varphi : I \rightarrow M$  を取る . 仮定 2 により  $\psi|_I = \varphi$  となる準同型  $\psi : R \rightarrow M$  を見つければよい .  $I = 0$  のときは自明だから  $I \neq 0$  とする .  $R$  が単項イデアル整域だから , ある  $\alpha (\neq 0) \in R$  を使って  $I = (\alpha)$  と書ける .  $\varphi(\alpha) \in M$  なので  $M$  の可除性により , ある  $m \in M$  が存在して  $\varphi(\alpha) = \alpha m$  となる . そこで  $\psi : R \rightarrow M$  を  $\psi(r) := rm$  で定めれば  $\psi(\alpha) = \alpha m = \varphi(\alpha)$  だから  $\psi|_I = \varphi$  である .

(3  $\implies$  4)  $\mathbb{Z}$  は単項イデアル整域である .

(4  $\implies$  1) 選択公理と同値な次の命題を示す .

集合族  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が「任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対し  $|X_\lambda| \geq 2$ 」を満たすとき ,  
有限集合の族  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が存在して任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $\emptyset \neq F_\lambda \subsetneq X_\lambda$  となる .

同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice の定理 2 を参照 .

集合族  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が「任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対し  $|X_\lambda| \geq 2$ 」を満たすとす . これらは互いに素としてよい .  $X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  と置く .  $X$  を基底とする  $\mathbb{Q}$  上の線形空間を  $V$  とする . 以下これを可除アーベル群として考える  $H := \langle x - y \mid \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ が存在して } x, y \in X_\lambda \rangle \subset V$  は部分群で ,  $D := V/H$  も可除アーベル群になる .  $v \in V$  の属する同値類を  $\bar{v} \in D$  で表す . 任意の  $x, y \in X_\lambda$  に対し  $\bar{x} = \bar{y}$  である . よって  $\bar{x} \in D$  は  $x \in X_\lambda$  の取り方によらず ,  $\lambda$  のみから定まる . そこで  $\hat{\lambda} := \bar{x}$  と定める .  $\Lambda$  で生成される自由アーベル群を  $F$  とする .

$$m_\lambda := \begin{cases} |X_\lambda| & (|X_\lambda| < \infty \text{ のとき}) \\ 2 & (|X_\lambda| = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

として ,  $f(\lambda) := m_\lambda \lambda$  と  $g(\lambda) := \hat{\lambda}$  により , 単射準同型  $f : 0 \longrightarrow F \xrightarrow{f} F$   
 $F \longrightarrow F$  と準同型  $g : F \longrightarrow D$  が得られる . 仮定 4 より可除アーベル群  $D$  は入射的 , よって準同型  $h : F \longrightarrow D$  で  $h \circ f = g$  を満たすものが存在する .  $\lambda \in \Lambda$  に対して

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & F & \xrightarrow{f} & F \\ & & \downarrow g & \swarrow h & \\ & & D & & \end{array}$$

$$\hat{\lambda} = g(\lambda) = h(f(\lambda)) = h(m_\lambda \lambda) = m_\lambda h(\lambda).$$

$h(\lambda) \in D = V/H$  だから , ある  $v_\lambda \in V$  を使って  $h(\lambda) = \bar{v}_\lambda$  と書ける .  $v_\lambda = \sum_{x \in X} \alpha_x^{(v_\lambda)} x$

( $\alpha_x^{(v_\lambda)} \in \mathbb{Q}$  は有限個を除いて 0) と一意的に書けて , このとき

$$\hat{\lambda} = m_\lambda h(\lambda) = m_\lambda \bar{v}_\lambda = \overline{m_\lambda v_\lambda} = \overline{\sum_{x \in X} m_\lambda \alpha_x^{(v_\lambda)} x}.$$

任意の  $y \in X_\lambda$  を一つ取れば取れば  $\hat{\lambda} = \bar{y}$  だったから  $\bar{y} = \overline{\sum_{x \in X} m_\lambda \alpha_x^{(v_\lambda)} x}$  である . 故に

$(m_\lambda \alpha_y^{(v_\lambda)} - 1)y + \sum_{x \neq y} m_\lambda \alpha_x^{(v_\lambda)} x \in H$  だから , 任意の  $x \in X_\lambda$  に対して  $m_\lambda \alpha_x^{(v_\lambda)} \in \mathbb{Z}$  と

なる . よってある  $n_x \in \mathbb{Z}$  が存在して  $\alpha_x^{(v_\lambda)} = \frac{n_x}{m_\lambda}$  と書ける . このとき

$$\overline{\sum_{x \in X_\lambda} m_\lambda \alpha_x^{(v_\lambda)} x} = \overline{\sum_{x \in X_\lambda} n_x x} = \sum_{x \in X_\lambda} n_x \bar{x} = \sum_{x \in X_\lambda} n_x \hat{\lambda}$$

だから  $\sum_{x \in X_\lambda} n_x = 1$  である . 従って  $\alpha_x^{(v_\lambda)} \in \frac{1}{m_\lambda} \mathbb{Z}$  かつ  $\sum_{x \in X_\lambda} \alpha_x^{(v_\lambda)} = \frac{1}{m_\lambda}$  が分かった .  
 そこで

$$n_\lambda := \min \left\{ n > 0 \mid \text{ある } x \in X_\lambda \text{ に対して } \alpha_x^{(v_\lambda)} \equiv \frac{n}{m_\lambda} \pmod{1} \right\}$$

$$F_\lambda := \left\{ x \in X_\lambda \mid \alpha_x^{(v_\lambda)} \equiv \frac{n_\lambda}{m_\lambda} \pmod{1} \right\}$$

とすれば (これらは  $v_\lambda$  の取り方によらない) ,  $F_\lambda \subset X_\lambda$  ,  $0 < |F_\lambda| < \infty$  である .

あとは  $F_\lambda \subsetneq X_\lambda$  を示せばよい . これは  $|X_\lambda| = \infty$  のときは明らかだから  $|X_\lambda| < \infty$  と  
 してよい .  $F_\lambda = X_\lambda$  と仮定する . 即ち任意の  $x \in X_\lambda$  に対し  $\alpha_x^{(v_\lambda)} \equiv \frac{n_\lambda}{m_\lambda} \pmod{1}$  であ  
 る . このとき  $\frac{1}{m_\lambda} = \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_x^{(v_\lambda)} \equiv \frac{n_\lambda}{m_\lambda} m_\lambda \equiv 0 \pmod{1}$  となり  $m_\lambda > 1$  に矛盾する .  $\square$

定理 . 次の命題は (ZF 上) 同値

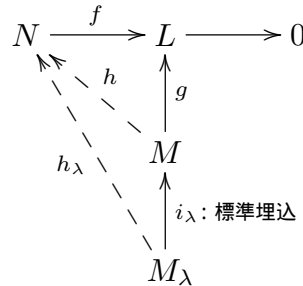
1. 選択公理
2. 任意の環  $R$  と  $R$ -加群の族  $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対して

$$\text{全ての } \lambda \in \Lambda \text{ について } M_\lambda \text{ が射影的} \implies M := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \text{ が射影的}$$

3. 任意の環  $R$  に対して , 任意の自由  $R$ -加群は射影的
4. 任意の自由アーベル群は射影的
5. ある環  $R$  が存在して , 任意の自由  $R$ -加群は射影的

証明 . (1  $\implies$  2) 任意の全射準同型  $f : N \rightarrow L$  と準同型  $g : M \rightarrow L$  を取る .

$\lambda \in \Lambda$  に対し  $i_\lambda : M_\lambda \rightarrow M$  を標準的な埋め込みとして ,  $A_\lambda := \{h_\lambda : M_\lambda \rightarrow N \mid f \circ h_\lambda = g \circ i_\lambda\}$  と置く .  $M_\lambda$  は射影的だから  
 $A_\lambda \neq \emptyset$  である . よって選択公理により  $(h_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  が取れる . すると直和の普遍性から  $h : M \rightarrow N$  で  $h \circ i_\lambda = h_\lambda$  となる  
 ようなものが存在する . このとき  $f \circ h \circ i_\lambda = f \circ h_\lambda = g \circ i_\lambda$  だから  
 $f \circ h = g$  である .



逆「 $M$  が射影的  $\implies$  各  $M_\lambda$  が射影的」は選択公理によらず成り立つ .

(2  $\implies$  3)  $R$  自身を  $R$ -加群とみるとき ,  $R$  は射影的 . よって自由  $R$ -加群  $\bigoplus R$  は射影  
 的である .

3  $\implies$  4 と 4  $\implies$  5 は明らか .

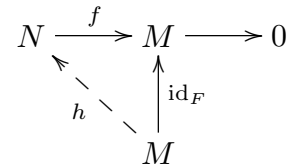
(5  $\implies$  1) 選択公理と同値な AMC を示す .

AMC (= the Axiom of Multiple Choice) とは次の命題のこと .

非空集合の族  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対し , 有限集合の族  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  で  
 任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対し  $\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda$  となるものが存在する .

同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice を参照 .

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を互いに素な非空集合の族とする .  $X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  と置く .  $\Lambda$  で生成される自由  $R$ -加群を  $M$  とし ,  $X$  で生成される自由  $R$ -加群を  $N$  とする .  $X_\lambda$  の元を  $\lambda$  に写す全射  $X \rightarrow \Lambda$  から自然に全射準同型  $f : N \rightarrow M$  が得られる .



仮定より自由  $R$ -加群  $M$  は射影的 , よってある  $h : M \rightarrow N$  が存在して  $f \circ h = \text{id}_M$  となる .  $\lambda \in \Lambda \subset M$  に対し  $h(\lambda) = \sum_{x \in X} \alpha_{\lambda,x} x$  ( $\alpha_{\lambda,x} \in R$  は有限個を除いて 0) と書く .

$\lambda = f \circ h(\lambda) = \sum_{\mu \in \Lambda} \left( \sum_{x \in X_\mu} \alpha_{\lambda,x} \right) \mu$  であり , 表現の一意性から  $\sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x} = 1$  となる . 故に  $F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid \alpha_{\lambda,x} \neq 0\} \subset X_\lambda$  は空でない有限集合である .  $\square$

「AMC  $\implies$  選択公理」には基礎の公理が使われているので , 5  $\implies$  1 の証明も基礎の公理を使っていることになる . 4  $\implies$  1 は基礎の公理を使わずに証明できる .

証明 . 選択公理と同値な次の命題を示す .

集合族  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が「任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対し  $|X_\lambda| \geq 2$ 」を満たすとき ,  
 有限集合の族  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が存在して任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $\emptyset \neq F_\lambda \subsetneq X_\lambda$  となる .

同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice の定理 2 を参照 .

5  $\implies$  1 の証明と同様にして  $\alpha_{\lambda,x} \in \mathbb{Z}$  を定めて  $F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid \alpha_{\lambda,x} > 0\}$  と定める . 勿論  $\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda$  である . 今  $\sum_{x \in X_\lambda} \alpha_{\lambda,x} = 1$  で  $|X_\lambda| \geq 2$  だから  $F_\lambda = X_\lambda$  はありえない . 故に  $\emptyset \neq F_\lambda \subsetneq X_\lambda$  となる  $\square$

## 参考文献

- [1] Andreas Blass , Injectivity, projectivity, and the axiom of choice, Trans. Amer. Math. Soc. 255 (1979), 31-59.

[http://www.ams.org/journals/tran/1979-255-00/  
S0002-9947-1979-0542870-6/home.html](http://www.ams.org/journals/tran/1979-255-00/S0002-9947-1979-0542870-6/home.html)