

# $\cup, \cap$ の分配法則と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2012年1月31日

定理.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は非空集合の族を表すとし,  $X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  と置く. 次の命題は同値.

1. 選択公理
2. 任意の  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と, 定義域が  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\{\lambda\} \times X_\lambda)$  である写像  $A$  に対し

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{x_\lambda \in X_\lambda} A(\lambda, x_\lambda) = \bigcup_{(x_\lambda) \in X} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda, x_\lambda)$$

3. 任意の  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対し

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{x_\lambda \in X_\lambda} x_\lambda = \bigcup_{(x_\lambda) \in X} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$$

証明. (1  $\implies$  2) まず  $\supset$  は選択公理によらず ZF で成立している.

$\therefore$  任意の  $u \in \bigcup_{(x_\lambda) \in X} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda, x_\lambda)$  を取る. 即ち, ある元  $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in X$  が存在して  $u \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda, y_\lambda)$  となる. よって各  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $u \in A(\lambda, y_\lambda) \subset \bigcup_{x_\lambda \in X_\lambda} A(\lambda, x_\lambda)$  である. したがって  $u \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{x_\lambda \in X_\lambda} A(\lambda, x_\lambda)$  である.

なので  $\subset$  を示せばよい.  $u \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{x_\lambda \in X_\lambda} A(\lambda, x_\lambda)$  とする. 即ち, 任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $u \in \bigcup_{x_\lambda \in X_\lambda} A(\lambda, x_\lambda)$  である. つまり  $B_\lambda := \{x_\lambda \in X_\lambda \mid u \in A(\lambda, x_\lambda)\}$  は空でない. そ

ここで  $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に選択公理を適用して元  $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \subset X$  を得る . このとき

$$u \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda, y_\lambda) \subset \bigcup_{(x_\lambda) \in X} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda, x_\lambda).$$

(2  $\implies$  3)  $A(\lambda, x) := x$  として仮定を適用すれば明らか .

(3  $\implies$  1) 集合  $u$  を任意に一つ選んでおく . 任意の  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を取り ,  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $Y_\lambda := \{\{u, x\} \mid x \in X_\lambda\}$  と置く .  $Y := \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  として  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に仮定 3 を適用すれば

$$\bigcup_{(y_\lambda) \in Y} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{y_\lambda \in Y_\lambda} y_\lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{x_\lambda \in X_\lambda} \{u, x\} \ni u$$

従って , ある  $(y_\lambda) \in Y$  が存在して  $u \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda$  となることが分かる .  $Y_\lambda$  の定義から  $y_\lambda = \{u, x_\lambda\}$  となる  $x_\lambda \in X_\lambda$  が唯一つ存在する . このとき  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in X$  だから  $X \neq \emptyset$  . □

## 参考文献

- [1] H. Rubin and J. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice*, North Holland, 1963.
- [2] Horst Herrlich, *Axiom of Choice* , Springer, 2006
- [3] 松坂 和夫 , 『集合・位相入門』 , 岩波書店 , 1968 年