

位相空間のコホモロジーと選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2012年2月6日

定義. X を集合, G を群とする. 次の条件を満たす (T, p) を X 上の G -torsor という.

1. $p: T \rightarrow X$ は全射である. p を射影という.
2. G は T に右から作用する. $g \in G$ の $t \in T$ への作用を t^g で表す.
3. 任意の $t \in T$ と $g \in G$ に対し $p(t^g) = p(t)$.
4. $p(t) = p(s)$ を満たす $t, s \in T$ に対し, ある $g \in G$ が一意に存在して $s = t^g$ となる.

例. $T := X \times G$, $p(x, g) := x$, $(t, g)^h := (t, gh)$ と定めれば (T, p) は X 上の G -torsor になる.

定義. G -torsor (T, p) , (T', p') が同型

\iff 全単射 $T \rightarrow T'$ で射影と群作用と可換になる (即ち $p'(f(t)) = p(t)$ かつ $f(t)^g = f(t^g)$) ようなものが存在する.

定義. X 上の G -torsor の同型類がなすクラスを $H^1(X, G)$ と書く.

先の例により X 上の G -torsor は少なくとも一つ存在するから, $H^1(X, G) \neq \emptyset$ が分かる. G -torsor $X \times G$ が属する同型類を 1 で表すことにする. 即ち $1 \in H^1(X, G)$.

定理. 選択公理 \iff 任意の集合 X と任意の群 G に対して $H^1(X, G) = \{1\}$

証明. (\implies) (T, p) を X 上の G -torsor とする. (T, p) が $X \times G$ と同型であることを示せばよい. p は全射だから選択公理によりある写像 $s: X \rightarrow T$ が存在して $p \circ s = \text{id}_X$ を満たす. このとき $f: X \times G \rightarrow T$ を $f(x, g) := s(x)^g$ で定義すれば f は同型である.

(\impliedby) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする. ある集合 S が存在して任意の

$\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| = |S|$ であると仮定してよい .

集合に関する命題の定理 2 を参照 .

G を S の置換がなす群として , $T_\lambda := \{t : S \rightarrow X_\lambda \mid t \text{ は全単射} \} \neq \emptyset$, $T := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ と置く . G は T に $t^g := t \circ g$ によって作用する . 射影 $p : T \rightarrow \Lambda$ を T_λ の元を $\lambda \in \Lambda$ へ写す写像とすれば , (T, p) は Λ 上の G -torsor である . 仮定により同型 $f : T \rightarrow \Lambda \times G$ が存在する . 今 $s : \Lambda \rightarrow T$ を $s(\lambda) := f^{-1}(\langle \lambda, \text{id}_S \rangle)$ で定めると f が同型であることから $s(\lambda) \in T_\lambda$ である . そこで元 $a \in S$ を一つ取り , $\varphi : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を $\varphi(\lambda) := s(\lambda)(a)$ で定めれば φ が選択関数である . □

定理. 選択公理 \iff 任意の集合 X と任意のアーベル群 G に対して $H^1(X, G) = \{1\}$

証明. (\implies) 明らか .

(\impliedby) 選択公理と同値な次の命題を示す .

集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$ 」を満たすとするとき , Λ 上の写像 f が存在して , 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $f(\lambda) \subsetneq X_\lambda$ かつ $0 < |f(\lambda)| < \infty$.

the Axiom of Multiple Choice の定理 2 を参照 .

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$ 」を満たす集合族とする . $\{X_\lambda\}$ は互いに素としてよい . $X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と置いて , G を X で生成される自由アーベル群とする . 即ち任意の元 $g \in G$ は

$$g = \prod_{x \in X} x^{n(g,x)}, \quad n(g,x) \in \mathbb{Z}, \quad \text{有限個の } x \in X \text{ を除いて } n(g,x) = 0$$

と表示される . $\lambda \in \Lambda$ に対して $n(g, \lambda) := \sum_{x \in X_\lambda} n(g, x)$ と定める .

$$H := \{g \in G \mid \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } n(g, \lambda) = 0\}$$

$$T_\lambda := \{g \in G \mid n(g, \lambda) = 1, \text{ 任意の } \mu \neq \lambda \text{ に対して } n(g, \mu) = 0\}$$

と置けば $H \subset G$ は部分群で , 乗法により H は T_λ に作用する . $T := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ として , 射影 $p : T \rightarrow \Lambda$ を T_λ の元を $\lambda \in \Lambda$ へ写す写像とすれば , (T, p) は Λ 上の H -torsor である . 仮定により同型 $g : T \rightarrow \Lambda \times H$ が存在する . 今 $e \in H$ を単位元として $s : \Lambda \rightarrow T$ を $s(\lambda) := g^{-1}(\langle \lambda, e \rangle)$ で定めると g が同型であることから $s(\lambda) \in T_\lambda$ である . $f(\lambda) := \{x \in X_\lambda \mid n(s(\lambda), x) > 0\}$ と置く . $s(\lambda) \in T_\lambda$ だから

$\sum_{x \in X_\lambda} n(s(\lambda), x) = n(s(\lambda), \lambda) = 1$, 故に $f(\lambda) \neq \emptyset$ である . また $n(s(\lambda), x) \neq 0$ となる $x \in X_\lambda$ は有限個だから $|f(\lambda)| < \infty$ となる . 更に , $|X_\lambda| \geq 2$ だから , $f(\lambda) \subsetneq X_\lambda$ であることも分かる . 故にこの f が条件を満たす . □

参考文献

- [1] Andreas Blass, Cohomology detects Failures of the Axiom of Choice, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983), 257–269, <http://www.ams.org/journals/tran/1983-279-01/S0002-9947-1983-0704615-7/home.html>