

閉集合と直積と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2011年11月22日

定理 1. 選択公理

$\iff \{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とし, 集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は任意の $\lambda \in \Lambda$ について $A_\lambda \subset X_\lambda$ を満たすとする. このとき

$$\overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \supset \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$$

左辺の $\overline{\quad}$ は $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ での閉包, 右辺の $\overline{\quad}$ は各 X_λ での閉包である.

また, 逆向きの包含関係 $\prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda} \subset \overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}$ は (選択公理によらず) 常に成り立つ.

証明. (\implies) $x = (x_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$ を取る. $\lambda \in \Lambda$ に対して $x_\lambda \in \overline{A_\lambda}$ だから, x_λ の任意の開近傍 $U \subset X_\lambda$ に対し $U \cap A_\lambda \neq \emptyset$ となる. x の任意の開近傍 $U \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を取る. 族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が, 各 U_λ は X_λ の開集合で $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset U$ となるように取れる. このとき各 $\lambda \in \Lambda$ について $U_\lambda \cap A_\lambda \neq \emptyset$ である. 従って選択公理により $\prod_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap A_\lambda) \neq \emptyset$ となる. 故に $U \cap \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supset \prod_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap A_\lambda) \neq \emptyset$. よって $x \in \overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda}$.

(\impliedby) $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を空でない集合の族とする. $\infty \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ となる ∞ を一つ用意し, $X_\lambda := A_\lambda \cup \{\infty\}$ と置く. X_λ に密着位相を入れる. 明らかに $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$. このとき

$$\overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} \supset \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda} = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset.$$

($\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の中で考えて) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ だから, $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ でなければならない. \square

定理 2. 以下の命題は (ZF 上) 同値 .

1. 選択公理
2. $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とし, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\emptyset \neq A_\lambda \subset X_\lambda$ を満たすとする . このとき

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \text{ が閉集合} \implies \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対し } A_\lambda \subset X_\lambda \text{ が閉集合}$$

3. $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とし, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\emptyset \neq A_\lambda \subset X_\lambda$ を満たすとする . このとき

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \text{ が閉集合} \implies \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に対し } A_\lambda \subset X_\lambda \text{ が閉集合}$$

証明. (1 \implies 2) 定理 1 により $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \overline{\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda} = \prod_{\lambda \in \Lambda} \overline{A_\lambda}$ だから, $A_\lambda = \overline{A_\lambda}$. 即ち $A_\lambda \subset X_\lambda$ は閉集合である .

(2 \implies 3) 明らか .

(3 \implies 1) 選択公理が成り立たないと仮定する . すると非空集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \emptyset$ となるものが存在する . $\infty \notin \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ なる ∞ を一つ用意し, $X_\lambda := A_\lambda \cup \{\infty\}$ と定める . 各 X_λ には密着位相を入れる . $\emptyset = \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の閉集合だから, 仮定 3 より, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $A_\lambda \subsetneq X_\lambda$ が閉集合となる . X_λ には密着位相が入っていたから, $A_\lambda = \emptyset$ でなければならず, 矛盾する . \square

次の命題は ZF で証明できる .

命題. $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とし, 族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は任意の $\lambda \in \Lambda$ について $\emptyset \neq A_\lambda \subset X_\lambda$ を満たすとする . また $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ であるとする . このとき

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \text{ が閉集合} \implies \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対し } A_\lambda \subset X_\lambda \text{ が閉集合}$$

証明. 命題の仮定を満たす $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を取る . $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ だから, $(a_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ が取れる .

ある $\mu \in \Lambda$ が存在して $A_\mu \subset X_\mu$ が閉集合でないと仮定する . $p \in \overline{A_\mu} \setminus A_\mu$ が取れる . 写像 $f : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を

$$f(\lambda) := \begin{cases} a_\lambda & (\lambda \neq \mu \text{ のとき}) \\ p & (\lambda = \mu \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．明らかに $f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ かつ $f \notin \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ である． $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ は閉集合だから， f の開近傍 $U \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ で $U \cap \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \emptyset$ となるものが存在する．族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を，各 U_λ は X_λ の開集合で， $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \subset U$ となるように取る．このとき

$$\emptyset = U \cap \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supset \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \cap \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supset \prod_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap A_\lambda)$$

である． $p \in U_\mu$ かつ $p \in \overline{A_\mu}$ だから， $U_\mu \cap A_\mu \neq \emptyset$ である．そこで $q \in U_\mu \cap A_\mu$ を一つ取り，写像 $g: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を

$$g(\lambda) := \begin{cases} a_\lambda & (\lambda \neq \mu \text{ のとき}) \\ q & (\lambda = \mu \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定めれば， $g \in \prod_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap A_\lambda) = \emptyset$ となり矛盾する．

□

参考文献

- [1] Joao Paulo C. de Jesus and Samuel G. da Silva, Closed products of sets and the axiom of choice, Acta Mathematica Hungarica, Volume 133, Numbers 1–2, 128–132, <http://www.springerlink.com/content/c542476428j73668/>