集合の濃度と選択公理

alg-d

http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 2 月 26 日

$|X|$ で X の基数 (濃度) を表す.

定義. X と Y を集合とする.

1. $|X| \leq |Y| \iff$ 単射 $X \longrightarrow Y$ が存在する
2. $|X| = |Y| \iff$ 全単射 $X \longrightarrow Y$ が存在する
3. $|X| < |Y| \iff |X| \leq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$
4. $|X| \leq^* |Y| \iff$ 全射 $Y \longrightarrow X$ が存在するか, $X = \emptyset$
5. $|X| <^* |Y| \iff |X| \leq^* |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$

命題.
1. $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| = |Y|$ (Bernstein の定理)
2. $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ (Cantor の定理)
3. $|X| \leq |Y|$ ならば $|X| \leq^* |Y|$
4. 選択公理を仮定するとき, $|X| \leq^* |Y|$ ならば $|X| \leq |Y|$

定義. 整列された無限集合 X を使って $|X|$ と表される基数をアレフと言い, $\aleph$ で表す. 特に, 自然数全体がなす整列集合で表されるアレフを $\aleph_0$ と書く.

命題. X を集合とする. $\aleph \not\leq |X|$ となるような最小の $\aleph$ が存在する.
(勿論選択公理は仮定しない. このような $\aleph$ を X の Hartogs number と言う.)

証明. $\alpha := \{\beta : 順序数 \mid |\beta| \leq |X|\}$ と置く. α は集合である.

$\because$) $W := \{R \subset X \times X \mid R$ は X のある部分集合を整列する $\}$ と定義する. W は集合である. よって「W に現れる整列順序と同型な順序数全体」も集合である. この集合は α と一致する.

順序数の推移的な集合は順序数だから，α も順序数である．$\alpha \notin \alpha$ だから $|\alpha| \not\leq |X|$. よって，α の定義から $\aleph := |\alpha|$ は Hartogs number である． □

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値

1. 選択公理
2. 任意の X, Y について，$|X| \leq |Y|$ または $|Y| \leq |X|$
3. 任意の X, Y について，$|X| \leq^* |Y|$ または $|Y| \leq^* |X|$

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) X と Y を任意の集合とする．選択公理と同値な整列可能定理により，この 2 つを整列する．すると整列順序の性質から $|X| \leq |Y|$ または $|Y| \leq |X|$ が分かる．

($2 \Longrightarrow 3$) は明らか.

($3 \Longrightarrow 1$) まず $|Y| \leq^* |X| \Longrightarrow |Y| \leq |\mathcal{P}(X)|$ であることに注意する.

$\because$) $f : X \longrightarrow Y$ を全射だとすると $Y \ni b \longmapsto f^{-1}(b) \in \mathcal{P}(X)$ は単射である.

整列可能定理を示す．X を集合とする．$\aleph$ を X の Hartogs number とすると $\aleph \not\leq |\mathcal{P}(X)|$. よって先の注意より $\aleph \not\leq^* |X|$ である．従って仮定 3 から $|X| \leq^* \aleph$ となる．$\aleph = |\alpha|$ となる順序数 α と全射 $f : \alpha \longrightarrow X$ を取る．すると $g(a) := \min f^{-1}(a)$ として単射 $g : X \longrightarrow \alpha$ が得られる．よって X は整列可能である． □

定義. κ と λ を基数とする．$\kappa = |X|,\ \lambda = |Y|,\ X \cap Y = \emptyset$ となるような X, Y を取る.

1. $\kappa + \lambda := |X \sqcup Y|$
2. $\kappa \cdot \lambda := |X \times Y|$
3. $\kappa^\lambda := |X^Y| \quad (X^Y := \{f : Y \longrightarrow X\})$
4. $\kappa = \lambda + \mu$ となる基数 μ が唯一つ存在するとき，$\kappa - \lambda := \mu$
5. $\kappa = \lambda \cdot \mu$ となる基数 μ が唯一つ存在するとき，$\kappa \div \lambda := \mu$

※ n が有限基数のとき，κ の n 個の積と κ^n は一致する.

補題 2. 任意の基数 κ, λ について
$\kappa \leq \lambda \Longleftrightarrow$ ある基数 μ が存在して $\kappa + \mu = \lambda$

補題 3. 任意の $\aleph$ に対し $\aleph^2 = \aleph$.

証明. 無限順序数 α に対し $|\alpha \times \alpha| = |\alpha|$ を示せばよい.

(i) $\alpha = \omega$ のときは明らか.

(ii) $\alpha = \beta + 1$ のとき，明らかに $|\alpha| = |\beta|$ なので $|\alpha| = |\beta| = |\beta \times \beta| = |\alpha \times \alpha|$.

(iii) α が極限順序数のとき.

ある $\beta < \alpha$ に対し $|\beta| = |\alpha|$ となるときは (ii) と同様 $|\alpha| = |\alpha \times \alpha|$ となる．なので全ての $\beta < \alpha$ に対し $|\beta| < |\alpha|$ であるとする.

$\alpha \times \alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta \times \beta$ である．$\alpha \times \alpha$ に順序 R を

$$\langle \beta_1, \beta_2 \rangle R \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle \iff \begin{cases} \max\{\beta_1, \beta_2\} < \max\{\gamma_1, \gamma_2\} \\ \text{または} \max\{\beta_1, \beta_2\} = \max\{\gamma_1, \gamma_2\},\ \beta_1 < \gamma_1 \\ \text{または} \max\{\beta_1, \beta_2\} = \max\{\gamma_1, \gamma_2\},\ \beta_1 = \gamma_1,\ \beta_2 < \gamma_2 \end{cases}$$

と定める．この R は整列順序である．また，$\beta < \alpha$ に対し $\beta \times \beta \subset \alpha \times \alpha$ は initial R-section となる.

順序数 $\psi(\beta)$ を $\psi(\beta) \cong (\beta \times \beta, R)$ で定める．$\beta < \alpha$ のとき

$$|\psi(\beta)| = |\beta \times \beta| = \begin{cases} \text{有限基数} \\ |\beta| \end{cases} < |\alpha|$$

故に $\psi(\beta) < \alpha$ である．よって

$$\alpha \times \alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beta \times \beta \cong \bigcup_{\beta < \alpha} \psi(\beta) \leq \alpha$$

従って $|\alpha \times \alpha| \leq |\alpha|$ である. □

補題 4. 基数 $\kappa, \lambda \geq 2$ に対し $\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$

証明. $\kappa = |X|,\ \lambda = |Y|,\ X \cap Y = \emptyset$ となる集合を取る．$a \neq b$ となる $a, b \in X$，$s \neq t$ となる $s, t \in Y$ を取る．$\varphi : X \sqcup Y \longrightarrow X \times Y$ を

$$\varphi(x) := \begin{cases} \langle x, s \rangle & (x \in X \text{ のとき}) \\ \langle a, x \rangle & (x \in Y \setminus \{s\} \text{ のとき}) \\ \langle b, t \rangle & (x = s \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めれば φ は単射である. □

補題 5. 基数 κ, λ, μ とアレフ $\aleph$ が $\kappa \cdot \aleph \leq \lambda + \mu$ を満たす時，$\kappa \leq \mu$ または $\aleph \leq \lambda$.

証明. $\kappa = |X|,\ \lambda = |Y|,\ \mu = |Z|$ となる集合 X, Y, Z と $\aleph = |W|$ となる整列順序集合 W を取る．$Y \cap Z = \emptyset$ としてよい．仮定より単射 $f : X \times W \longrightarrow Y \sqcup Z$ が存在する.

$\bar{Y} := f^{-1}(Y),\ \bar{Z} := f^{-1}(Z)$ とすれば $|\bar{Y}| = |Y| = \lambda,\ |\bar{Z}| = |Z| = \mu,\ X \times W = \bar{Y} \sqcup \bar{Z}$ である．

(i) $\{x\} \times W \subset \bar{Y}$ となる $x \in X$ が存在するとき．
$\aleph = |W| = |\{x\} \times W| \leq |\bar{Y}| = \lambda$ である．

(ii) どの $x \in X$ についても $\{x\} \times W \not\subset \bar{Y}$ となるとき．
$w_x := \min\{w \in W \mid \langle x, w\rangle \in \bar{Z}\}$ と書けば

$$\kappa = |X| = \Big|\{\langle x, w_x\rangle \mid x \in X\}\Big| \leq |\bar{Z}| = \mu.$$

$\square$

補題 6. 基数 κ, λ とアレフ $\aleph$ が $\aleph \leq \kappa \cdot \lambda$ を満たす時，$\aleph \leq \kappa$ または $\aleph \leq \lambda$.

証明. $\kappa = |X|,\ \lambda = |Y|$ となる集合 X, Y と $\aleph = |W|$ となる整列順序集合 W を取る．単射 $f : W \longrightarrow X \times Y$ が存在する．π_X, π_Y をそれぞれ $X \times Y$ から X, Y への射影として $U := \pi_X \circ f(W) \subset X,\ V := \pi_Y \circ f(W) \subset Y$ と置く．W の整列順序を使って，U, V は整列可能である．また $f(W) \subset U \times V$ である．このとき補題 3 を使って $\aleph = |W| \leq |U \times V| = |U| \times |V| = \max\{|U|, |V|\}$．故に $\aleph \leq |U|$ または $\aleph \leq |V|$ であるが，それぞれ $\aleph \leq \kappa,\ \aleph \leq \lambda$ を導く． $\square$

補題 7. 任意のアレフ $\aleph, \aleph'$ に対し $\aleph \cdot \aleph' = \aleph + \aleph' = \max\{\aleph, \aleph'\}$.

証明. $\aleph' \leq \aleph$ だとすると

$$\begin{aligned}\aleph &\leq \aleph + \aleph' \\ &\leq \aleph \cdot \aleph' \quad (\text{補題 4 による}) \\ &\leq \aleph \cdot \aleph \\ &= \aleph \quad (\text{補題 3 による}) \\ &= \max\{\aleph, \aleph'\}\end{aligned}$$

$\square$

定理 8. 次の命題は (ZF 上) 同値

1. 選択公理
2. 任意の無限基数 κ について，$\kappa^2 = \kappa$
3. 任意の無限基数 κ, λ について，$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda$
4. $\kappa + \lambda = \kappa$ または $\kappa + \lambda = \lambda$

5. $\kappa \cdot \lambda = \kappa$ または $\kappa \cdot \lambda = \lambda$

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 整列可能定理により，全ての無限基数は $\aleph$ なので補題 3 より明らか.

($2 \Longrightarrow 3$) $\kappa + \lambda = (\kappa+\lambda)^2 = \kappa^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \lambda + \lambda^2 \geq \kappa \cdot \lambda \geq \kappa + \lambda$

($3 \Longrightarrow 1$) 整列可能定理を示す．X を集合として $\kappa := |X|$ と置く．$\aleph$ を X の Hartogs number とする．仮定 3 より $\kappa + \aleph = \kappa \cdot \aleph$ となる．Hartogs number の定義より $\aleph \not\leq \kappa$ だから，補題 5 より $\kappa \leq \aleph$ となる．故に X は整列可能である.

($1 \Longrightarrow 4$) 整列可能定理により，全ての無限基数は $\aleph$ なので補題 7 より明らか.

($4 \Longrightarrow 1$) $\kappa + \lambda = \kappa$ のとき明らかに $\lambda \leq \kappa$．同様に $\kappa + \lambda = \lambda$ から $\kappa \leq \lambda$ が従う．故に，選択公理と同値な定理 1 の 2 が成立することが分かる.

($1 \Longleftrightarrow 5$) は ($1 \Longleftrightarrow 4$) と同様. □

定理 9. $\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X) := \{Y \subset X \mid Y$ は有限集合 $\}$ と置く.
選択公理 $\Longleftrightarrow$ 無限集合 X に対し $|X| = |\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)|$

証明. ($\Longrightarrow$) $f : \bigsqcup_{n=0}^{\infty} X^n \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ を $f\bigl(\langle a_1, \cdots, a_n\rangle\bigr) := \{a_1, \cdots, a_n\}$ で定める．これは明らかに全射なので $|\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)| \leq^* |\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X^n|$．よって選択公理より $|\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)| \leq |\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X^n|$．故に選択公理に気をつけると

$$|X| \leq \bigl|\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)\bigr| \leq \left|\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X^n\right| = \left|\bigsqcup_{n=0}^{\infty} X\right| = |X \times \omega| = |X|.$$

($\Longleftarrow$) 定理 8 の条件 2 を示す．X を集合とするとき $X \times X = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in X\}$ で，$\langle a, b\rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ が順序対の定義だったから $X \times X \subset \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X))$．故に

$$|X| \leq |X \times X| \leq \bigl|\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X))\bigr| = \bigl|\mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(X)\bigr| = |X|.$$

□

定理 10. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ $|X| < |X \cup Y|$ かつ $|Y| < |X \cup Y|$ ならば $X \cup Y$ は有限集合

証明. ($\Longrightarrow$) 定理 8 の 4 より明らか.

($\Longleftarrow$) 濃度の比較可能性 (定理 1 の条件 2) を示す．X, Y を任意の無限集合とする．勿論 $X \cup Y$ は無限集合になるから，仮定より $|X| = |X \cup Y|$ または $|Y| = |X \cup Y|$ でなければならない．このとき $|X| = |X \cup Y|$ ならば $|Y| \leq |X \cup Y| = |X|$，$|Y| = |X \cup Y|$ ならば $|X| \leq |X \cup Y| = |Y|$ である. □

定理 11. 選択公理
$\Longleftrightarrow$「X が有限集合 $\Longleftrightarrow$ $(X, \leq)$ が整列順序ならば $(X, \geq)$ も整列順序」

証明. ($\Longrightarrow$) 「X が有限集合 $\Longrightarrow$ $(X, \leq)$ が整列順序ならば $(X, \geq)$ も整列順序」は明らか．逆を示すため，X が「$(X, \leq)$ が整列順序ならば $(X, \geq)$ も整列順序」を満たすとする．整列可能定理より整列順序 $(X, \leq)$ が存在する．$(X, \leq) \cong \alpha$ となる順序数 $(\alpha, \leq)$ が存在する．$(X, \geq)$ の整列性より $(\alpha, \geq)$ も整列順序．よって明らかに $\alpha < \omega$，即ち X は有限集合．

($\Longleftarrow$) 整列できない無限集合 X が存在すると仮定する．この X は明らかに「$(X, \leq)$ が整列順序ならば $(X, \geq)$ も整列順序」を満たす．よって仮定に矛盾．故に任意の集合は整列可能である．□

定理 12. $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ は無限基数を表すとする．次の命題は (ZF 上) 同値

1. 選択公理
2. 任意の κ に対しある λ が存在して $\kappa = \lambda^2$
3. $\kappa^2 = \lambda^2$ ならば $\kappa = \lambda$
4. $\kappa < \lambda$ かつ $\mu < \nu$ ならば $\kappa + \mu < \lambda + \nu$
5. $\kappa < \lambda$ かつ $\mu < \nu$ ならば $\kappa \cdot \mu < \lambda \cdot \nu$
6. $\kappa + \mu < \lambda + \mu$ ならば $\kappa < \lambda$
7. $\kappa \cdot \mu < \lambda \cdot \mu$ ならば $\kappa < \lambda$
8. $\kappa < \lambda$ ならば $\lambda - \kappa$ が存在する
9. $\kappa < \lambda$ ならば $\lambda - \kappa = \lambda$
10. $\kappa < \lambda$ ならば $\lambda = \kappa \cdot \mu$ となる μ が存在する
11. $\kappa < \lambda$ ならば $\lambda \div \kappa$ が存在する
12. $\kappa < \lambda$ ならば $\lambda \div \kappa = \lambda$
13. $\kappa + \mu = \kappa + \nu$ ならば $\mu = \nu$ または $\mu, \nu < \kappa$
14. $\kappa + \kappa < \kappa + \lambda$ ならば $\kappa < \lambda$
15. $\mu < \kappa$ かつ $\nu < \kappa$ ならば $\mu + \nu \neq \kappa$
16. $\mu < \kappa$ かつ $\nu < \kappa$ ならば $\mu \cdot \nu \neq \kappa$
17. $\mu^\kappa < \mu^\lambda$ かつ $\mu \neq 0$ ならば $\kappa < \lambda$

証明. ($1 \Longrightarrow$ その他) 整列可能定理により，全ての無限基数は $\aleph$ である．よって補題 7 より 2–16 が従う．17 は定理 1 から分かる．

後は逆を示せばよいので，各条件の下で選択公理と同値な整列可能定理を示す．その為には，X を任意の無限集合，$\kappa := |X|$ として $\kappa \leq \aleph$ となる $\aleph$ の存在を示せばよい．特に明記しない限り，$\aleph$ は X の Hartogs number とする．($\aleph \not\leq \kappa$ に注意しておく．)

$(2 \Longrightarrow 1)$ 仮定 2 より，$\kappa + \aleph = \lambda^2$ となる λ が存在する．$\aleph \leq \kappa + \aleph = \lambda^2$ である．よって補題 6 より $\aleph \leq \lambda$ となる．従って補題 2 により $\lambda = \aleph + \mu$ となる μ が取れる．このとき

$$\kappa + \aleph = \lambda^2 = (\aleph + \mu)^2 = \aleph^2 + 2 \cdot \aleph \cdot \mu + \mu^2 \geq \aleph \cdot \mu.$$

よって補題 5 から $\aleph \leq \kappa$ または $\mu \leq \aleph$ が分かる．$\aleph \not\leq \kappa$ なので $\mu \leq \aleph$，従って $\lambda = \aleph + \mu \leq \aleph + \aleph = \aleph$．故に $\lambda = \aleph$ である．よって $\kappa \leq \kappa + \aleph = \lambda^2 = \aleph^2 = \aleph$.

$(3 \Longrightarrow 1)$ $\lambda := \kappa^{\aleph_0}$ と置くと $\kappa \leq \lambda$ かつ $\lambda^2 = \kappa^{2 \cdot \aleph_0} = \kappa^{\aleph_0} = \lambda$．故に $\lambda = |Y|$ として $\aleph$ を Y の Hartogs number とすれば $(\lambda + \aleph)^2 = \lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \aleph + \aleph^2 \geq \lambda \cdot \aleph$．また

$$\begin{aligned}
(\lambda + \aleph)^2 &= \lambda^2 + 2 \cdot \lambda \cdot \aleph + \aleph^2 \\
&= \lambda + 2 \cdot \lambda \cdot \aleph + \aleph \\
&\leq \lambda \cdot \aleph + 2 \cdot \lambda \cdot \aleph \quad (\text{補題 4 より}) \\
&= \lambda \cdot 3 \cdot \aleph \\
&= \lambda \cdot \aleph
\end{aligned}$$

だから，$(\lambda + \aleph)^2 = \lambda \cdot \aleph$ となる．よって $(\lambda + \aleph)^2 = \lambda \cdot \aleph = \lambda^2 \cdot \aleph^2 = (\lambda \cdot \aleph)^2$ が成立．従って仮定 3 より $\lambda + \aleph = \lambda \cdot \aleph$ が分かる．補題 5 から $\aleph \leq \lambda$ または $\lambda \leq \aleph$ となる，$\aleph \not\leq \lambda$ だから $\kappa \leq \lambda \leq \aleph$.

$(4 \Longrightarrow 1)$ $\lambda := \aleph_0 \cdot \kappa$ と置くと $\kappa \leq \lambda$ かつ $2 \cdot \lambda = 2 \cdot \aleph_0 \cdot \kappa = \aleph_0 \cdot \kappa = \lambda$ である．$\lambda = |Y|$ として $\aleph$ を Y の Hartogs number とする．$\lambda < \lambda + \aleph$ かつ $\aleph < \lambda + \aleph$ と仮定すると仮定 (4) より $\lambda + \aleph < (\lambda + \aleph) + (\lambda + \aleph) = 2 \cdot \lambda + 2 \cdot \aleph = \lambda + \aleph$ となって矛盾する．故に $\lambda = \lambda + \aleph$ または $\aleph = \lambda + \aleph$ である．$\aleph \not\leq \lambda$ なので $\aleph = \lambda + \aleph$ でなければならない．即ち $\kappa \leq \lambda \leq \aleph$.

$(5 \Longrightarrow 1)$ は $(4 \Longrightarrow 1)$ と同様.

$(6 \Longrightarrow 1)$ $\kappa \not\leq \aleph$ と仮定する．$\aleph < \kappa + \aleph$ である．故に $\aleph + \aleph = \aleph < \kappa + \aleph$ だから仮定 6 より $\aleph < \kappa$，よって矛盾.

$(7 \Longrightarrow 1)$ は $(6 \Longrightarrow 1)$ と同様.

$(8 \Longrightarrow 1)$ $\aleph \leq \kappa + \aleph$ である．$\aleph < \kappa + \aleph$ と仮定する．仮定 8 より $\kappa + \aleph = \aleph + \mu$ となる μ が唯一つ存在する．$\mu = \kappa$ も $\mu = \kappa + \aleph$ もこの式を満たすから，一意性より $\kappa = \kappa + \aleph$．従って $\aleph \leq \kappa$ となり矛盾．故に $\aleph = \kappa + \aleph$ であるので $\kappa \leq \aleph$.

$(9 \Longrightarrow 1)$ を示すには $(9 \Longrightarrow 8)$ を示せばよいが，それは明らか.

$(10 \Longrightarrow 1)$ $\aleph \leq \kappa + \aleph$ だから，仮定 (8) より $\kappa + \aleph = \aleph \cdot \mu$ となる μ が存在する．従って $\mu \cdot \alpha \leq \kappa + \aleph$ なので補題 5 より $\aleph \leq \kappa$ または $\mu \leq \aleph$．$\aleph$ は X の Hartogs number だったから $\aleph \not\leq |X| = \kappa$，即ち $\mu \leq \aleph$ である．よって補題 7 より $\kappa + \aleph = \aleph \cdot \mu = \aleph$ とな

る．故に $\kappa \leq \aleph$.

$(11 \Longrightarrow 1)$ を示すには $(11 \Longrightarrow 10)$ を示せばよいが，それは明らか.

$(12 \Longrightarrow 1)$ を示すには $(12 \Longrightarrow 11)$ を示せばよいが，それは明らか.

$(13 \Longrightarrow 1)$ $\aleph + \kappa = \aleph + (\kappa + \aleph)$ だから仮定 13 より $\kappa = \kappa + \aleph$ または $\kappa, \kappa + \aleph < \aleph$ である．$\aleph \not\leq \kappa$ だから $\kappa, \kappa + \aleph < \aleph$ となる．従って $\kappa \leq \aleph$.

$(14 \Longrightarrow 1)$ $\aleph + \aleph = \aleph \leq \aleph + \kappa$ である．$\aleph + \aleph < \aleph + \kappa$ だとすると仮定 14 から $\aleph < \kappa$ となり矛盾するので $\aleph = \aleph + \kappa$．故に $\kappa \leq \aleph$ である．

$(15 \Longrightarrow 1)$ を示すには $(15 \Longrightarrow 9)$ を示せば良い．$\kappa < \lambda$ とする．補題 2 より $\lambda = \kappa + \mu$ となる μ が存在する．仮定 15 より $\lambda = \mu$ となる，即ち μ は一意に決まる．よって $\lambda - \kappa = \lambda$ である．

$(16 \Longrightarrow 1)$ $\kappa \leq \kappa \cdot \aleph$, $\aleph \leq \kappa \cdot \aleph$ なので，仮定 16 より $\kappa = \kappa \cdot \aleph$ または $\aleph = \kappa \cdot \aleph$ である．$\aleph \not\leq \kappa$ だったから $\aleph = \kappa \cdot \aleph$, 従って $\kappa \leq \aleph$ となる．

$(17 \Longrightarrow 1)$ $\mu := 2^{\kappa^{\aleph_0}}$ と置く．$\mu = |Y|$ として $\aleph$ を Y の Hartogs number とする．$\mu^\kappa = (2^{\kappa^{\aleph_0}})^\kappa = 2^{\kappa^{\aleph_0 + 1}} = 2^{\kappa^{\aleph_0}} = \mu \leq \mu^\aleph$．$\mu^\kappa = \mu^\aleph$ だとすると $\aleph \leq \mu^\aleph = \mu^\kappa = \mu$ となり矛盾するから，$\mu^\kappa < \mu^\aleph$ である．故に仮定 17 より $\kappa < \aleph$. □

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice, Springer, 2006

[2] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the axiom of choice, North Holland, 1963.