

Bernstein の定理と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2012 年 2 月 29 日

定理 (Cantor-Bernstein-Schröder の定理). 単射 $f : X \rightarrow Y$ と単射 $g : Y \rightarrow X$ が存在するならば, 全単射 $h : X \rightarrow Y$ が存在する.

即ち, $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| = |Y|$ である, という事. この定理は選択公理を使わずに (ZF で) 証明できる.

以下, この命題を CBS と書くことにする.

証明. f, g のどちらかが全射ならば明らかだから, どちらも全射でないとする. 以下のよう
に集合を定義する.

$$X_n := \begin{cases} X \setminus g(Y) & (n = 0 \text{ のとき}) \\ g(Y_{n-1}) & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$
$$Y_n := \begin{cases} Y \setminus f(X) & (n = 0 \text{ のとき}) \\ f(X_{n-1}) & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$
$$X^+ := \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n, \quad X^- := X \setminus X^+$$
$$Y^+ := \bigcup_{n=0}^{\infty} Y_n, \quad Y^- := Y \setminus Y^+$$

f, g が単射なので, 異なる非負整数 m, n に対し $X_m \cap X_n = \emptyset, Y_m \cap Y_n = \emptyset$ である. また $X = X^+ \cup X^- = (\bigcup X_n) \cup X^-, Y = Y^+ \cup Y^- = (\bigcup Y_n) \cup Y^-$ となる.

$$f(X^+) = f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \text{ かつ } f(X) = Y \setminus Y_0 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n\right) \cup Y^- \text{ だから,}$$

$f(X^-) = Y^-$ である．そこで $h: X \rightarrow Y$ を

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in X_{2n}) \\ g^{-1}(x) & (x \in X_{2n+1}) \\ f(x) & (x \in X^-) \end{cases}$$

と定義すれば，これは明らかに全単射である． □

この定理から，すぐに「双対版」が思いつく．

命題 (双対 Cantor-Bernstein-Schröder の定理). 全射 $f: X \rightarrow Y$ と全射 $g: Y \rightarrow X$ が存在するならば，全単射 $h: X \rightarrow Y$ が存在する．

この命題を CBS^* で表すことにする．選択公理を使えば， CBS^* は CBS から簡単に導くことができる．

∴) 選択公理は「全射の右逆写像の存在」と同値．即ち

選択公理 \iff 任意の全射 $F: X \rightarrow Y$ に対して
ある単射 $G: Y \rightarrow X$ が存在して $F \circ G = \text{id}_Y$.

∴) (\implies) F の全射性より族 $\{F^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ は非空集合の族なので，選択関数 $G: Y \rightarrow \bigcup_{y \in Y} F^{-1}(y) = X$ が存在する．このとき明らかに $F \circ G = \text{id}_Y$.

(\impliedby) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする．各 X_λ は互いに素としてよい．このとき $F: \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow \Lambda$ を $F(x) := (x \in X_\lambda \text{ となる } \lambda)$ で定める． F は全射だから仮定より $F \circ G = \text{id}_Y$ となる $G: \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が存在する．このとき G が明らかに選択関数である．

そこで $u: Y \rightarrow X$, $v: X \rightarrow Y$ を全射 f, g の右逆写像として v, u に CBS を適用すれば全単射 $h: X \rightarrow Y$ が得られる．

つまり CBS^* は ZFC で証明可能．しかし， CBS^* は ZF (更に言えば $\text{ZF}+\text{DC}$) で証明できないことが知られている．

藤田博司さんがそのことについて書かれています．

<http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~fujita/notes.jp.html> の双対ベルンシュタイン定理について (PDF) を参照．また， ZF で「 $\text{CBS}^* \implies$ 選択公理」が成立するかどうかは未解決問題らしいです．

CBS での h に条件を加えた命題を考える．

命題. 単射 $f: X \rightarrow Y$ と単射 $g: Y \rightarrow X$ が存在するならば, 全単射 $h: X \rightarrow Y$ で $h \subset f \cup g^{-1}$ を満たすものが存在する.

$h \subset f \cup g^{-1}$ は f, g^{-1}, h を $X \times Y$ の部分集合とみなして考えるということ.

この命題を CBS_+ で表すことにする. 当然これの双対版も考えられます.

命題. 全射 $f: X \rightarrow Y$ と全射 $g: Y \rightarrow X$ が存在するならば, 全単射 $h: X \rightarrow Y$ で $h \subset f \cup g^{-1}$ を満たすものが存在する.

この命題を CBS_+^* で表すことにする.

CBS の証明の中で構成した全単射 h は明らかに $h \subset f \cup g^{-1}$ を満たす. 故に CBS_+ は ZF で証明可能である. 一方 CBS_+^* については次が成り立つ.

定理. 選択公理 $\iff \text{CBS}_+^*$

証明. (\implies) $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow X$ を全射とする. 選択公理により f, g の右逆写像 $u: Y \rightarrow X, v: X \rightarrow Y$ が存在する. 即ち $f \circ u = \text{id}_Y, g \circ v = \text{id}_X$. このとき $u^{-1} \subset f, v \subset g^{-1}$ である.

\therefore) (i) $u^{-1} \subset f$ について

任意の $\langle x, y \rangle \in u^{-1}$ を取る. $u(y) = x$ である. $f \circ u = \text{id}_Y$ より $y = f \circ u(y) = f(x)$ だから $\langle x, y \rangle \in f$ である. よって $u^{-1} \subset f$.

(ii) $v \subset g^{-1}$ について

任意の $\langle x, y \rangle \in v$ を取る. $v(x) = y$ である. $g \circ v = \text{id}_X$ より $x = g \circ v(x) = g(y)$ だから $\langle x, y \rangle \in g^{-1}$ である. よって $v \subset g^{-1}$.

単射 $v: X \rightarrow Y$ と単射 $u: Y \rightarrow X$ に CBS_+ を適用して全単射 $h: X \rightarrow Y$ で $h \subset v \cup u^{-1}$ を満たすものを取れば $h \subset v \cup u^{-1} \subset f \cup g^{-1}$.

(\impliedby) 全射 $f: X \rightarrow Y$ の右逆写像の存在を示す. $Z := (\{0\} \times \{0\}) \cup (\{1\} \times Y) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (\{n\} \times X)$ を考える. 写像 $k: Z \rightarrow Z$ を次で定める.

$$k(0, 0) := \langle 0, 0 \rangle$$

$$k(1, y) := \langle 0, 0 \rangle \quad (y \in Y)$$

$$k(2, x) := \langle 1, f(x) \rangle \quad (x \in X)$$

$$k(n, x) := \langle n-1, x \rangle \quad (x \in X, n \geq 3)$$

$$\begin{array}{ccccccc}
Z = (\{0\} \times \{0\}) \cup (\{1\} \times Y) \cup (\{2\} \times X) \cup (\{3\} \times X) \cup (\{4\} \times X) \cup \dots & & & & & & \\
\downarrow k & \searrow 0 & \searrow f & \searrow \text{id} & \searrow \text{id} & & \\
Z = (\{0\} \times \{0\}) \cup (\{1\} \times Y) \cup (\{2\} \times X) \cup (\{3\} \times X) \cup (\{4\} \times X) \cup \dots & & & & & &
\end{array}$$

明らかに k は全射である．そこで全射 $k: Z \rightarrow Z$ と全射 $k: Z \rightarrow Z$ に CBS_+^* を適用して全単射 $h: Z \rightarrow Z$ で $h \subset k \cup k^{-1}$ を満たすものを取る． $\{0\} \times Y \subset Z$ を Y と同一視することで $Y \subset Z$ とみなし，写像 $h|_Y$ を考える．

(i) $h|_Y \subset k^{-1}$ のとき

$y \in Y$ に対し $h(y) \in k^{-1}(y)$ となる．よって $k \circ h(y) = y$ ．また， k の定義より $k^{-1}(Y) = \{2\} \times X$ だから $h(y) \in k^{-1}(y) \subset \{2\} \times X$ である．故に，ある写像 $g: Y \rightarrow X$ を使って $h(y) = \langle 2, g(y) \rangle$ と書ける．このとき任意の $y \in Y$ に対し

$$y = k \circ h(y) = k(2, g(y)) = f(g(y)) = f \circ g(y)$$

即ち g は f の右逆写像．

(ii) $h|_Y \not\subset k^{-1}$ のとき

$h \subset k \cup k^{-1}$ だからある $a \in Y$ が存在して $h(a) = k(a)$ である．このとき k の定義から $h(a) = \langle 0, 0 \rangle$ となる． h は全単射だったから，実はこのような a は唯一つしか存在しない．故に $A := Y \setminus \{a\}$ と置けば $h|_A \subset k^{-1}$ となる．そこで A について (i) と同様の議論をすれば写像 $g: A \rightarrow X$ で $f \circ g = \text{id}_A$ となるものが取れる．そこで元 $b \in f^{-1}(a)$ を一つ取り $g(a) := b$ として $g: Y \rightarrow X$ へ拡張すれば明らかに g が f の右逆写像である． □

この \Leftarrow の証明では， CBS_+^* の「 $X = Y$ かつ $f = g$ 」の場合しか使っていない．故に次のことが分かる．

系．選択公理

\Leftrightarrow 全射 $f: X \rightarrow X$ に対して全単射 $h: X \rightarrow X$ で $h \subset f \cup f^{-1}$ となるものがある．

参考文献

- [1] Bernhard Banaschewski and Gregory H. Moore, The dual Cantor-Bernstein theorem and the partition principle, Notre Dame J. Formal Logic Volume 31, Number

3 (1990), 375–381

<http://projecteuclid.org/euclid.ndjfl/1093635502>

- [2] 藤田博司, 双対ベルンシュタイン定理について <http://www.math.sci.ehime-u.ac.jp/~fujita/notes.jp.html>