

線型空間の基底の存在と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2012年2月20日

定理 1. 選択公理 \iff 任意の線型空間に基底が存在する .

証明. (\implies) V を任意な線型空間とする . $\mathcal{A} := \{X \subset V \mid X \text{ は一次独立}\}$ とする . 一次独立の定義から , \mathcal{A} は明らかに有限性を持つ .

\mathcal{A} が有限性を持つとは「 $X \in \mathcal{A} \iff$ 任意の有限部分集合 $Y \subset X$ に対し $Y \in \mathcal{A}$ 」が成立すること .

よって選択公理と同値な Tukey の補題により \mathcal{A} は極大元 B を持つ .

Tukey の補題とは「有限性を持つ集合は (\subset についての) 極大元を持つ」という命題のこと . Zorn の補題・極大原理を参照 .

B が V を生成しないと仮定する . すると B の元の一次結合で表せないような元 $v \in V$ が存在するが , この時 $B \subsetneq B \cup \{v\} \in \mathcal{A}$ となり , B の極大性に矛盾する . よって B は V を生成する , 即ち V の基底である .

(\impliedby) 選択公理と同値な AMC を示す . 選択公理と同値な AMC を示す .

AMC (= the Axiom of Multiple Choice) とは次の命題のこと .

非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し , 有限集合の族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ で任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $\emptyset \neq F_\lambda \subset X_\lambda$ となるものが存在する .

同値性の証明は the Axiom of Multiple Choice を参照 .

$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする . k を体とし , $X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を不定元の集合とみなして有理関数体 $k(X)$ を考える .

単項式 $a = \alpha x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdots x_n^{e_n} \in k(X)$ に対し , $I_\lambda(a) := \{1 \leq i \leq n \mid x_i \in X_\lambda\}$ と置き ,

$\lambda\text{-deg}(a) := \sum_{i \in I_\lambda(a)} e_i$ を λ -次数と呼ぶことにする．各項の λ -次数が全て m になる多項式を m 次の λ -斉次多項式と呼ぶことにし，その次数も $\lambda\text{-deg}$ で表すことにする． $f \in k(X)$ が $f = \frac{g}{h}$ (g, h は λ -斉次多項式， $\lambda\text{-deg}(g) = \lambda\text{-deg}(h) + d$) と表せるとき， f を d 次の λ -斉次式と呼ぶことにする．

さて， $K := \{f \in k(X) \mid \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } f \text{ は } 0 \text{ 次の } \lambda\text{-斉次式}\}$ は $k(X)$ の部分体．よって $k(X)$ は K 上の線型空間とみなせる． $V := \langle X \rangle$ を X で K 上生成される $k(X)$ の部分空間とする．仮定より V は K 上の基底をもつ．それを B と書く．

さて， $\lambda \in \Lambda$ とする． $X_\lambda \subset V$ の任意の元 x は

$$x = \sum_{b \in B(x)} \alpha_b(x)b \quad (B(x) \subset B \text{ は有限集合, } \alpha_b(x) \in K^\times)$$

と一意に表される．他の元 $y \in X_\lambda$ も同様に $y = \sum_{b \in B(y)} \alpha_b(y)b$ と書くと

$$y = \left(\frac{y}{x}\right)x = \sum_{b \in B(x)} \left(\frac{y}{x}\alpha_b(x)\right)b$$

となる．表現の一意性から $B(x) = B(y)$ ， $\frac{\alpha_b(x)}{x} = \frac{\alpha_b(y)}{y}$ である．即ち， $B(x)$ と $\frac{\alpha_b(x)}{x}$

は $x \in X_\lambda$ によらずに λ から定まる．そこで $B_\lambda := B(x)$ ， $\beta_{b,\lambda} := \frac{\alpha_b(x)}{x}$ と書く．

$\alpha_b(x) \in K$ だから $\beta_{b,\lambda}$ は -1 次の λ -斉次式である．よって， $\beta_{b,\lambda}$ を既約分数で表す事になると，分母には必ず X_λ の元が現れる．故に

$$F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid \text{ある } b \in B_\lambda \text{ が存在して } x \text{ は } \beta_{b,\lambda} \text{ の分母に現れる}\}$$

と置けば各 $F_\lambda \subset X_\lambda$ は空でない有限部分集合である．よって AMC が成立する． \square

定理 2. 次の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理
2. 線型空間の生成系は基底を含む．
3. \mathbb{Q} -線型空間の生成系は基底を含む．
4. \mathbb{F}_2 -線型空間の生成系は基底を含む．

証明. (1 \implies 2) 定理 1 と同様．

(2 \implies 3) 明らか．

(3 \implies 1) AMC を示す．

AMC \implies 選択公理は基礎の公理を使っているから, この $3 \implies 1$ の証明も基礎の公理を使っていることになる. 実は, $3 \implies 1$ の証明には基礎の公理は必要ない. 何故ならば, 仮定 3 から「有限集合の族についての選択公理」が導かれるからである. それをここで示しておく.

「有限集合の族についての選択公理」を示すには次の命題を示せばよい.

有限集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$ 」を満たすとき, ある族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\emptyset \neq F_\lambda \subsetneq X_\lambda$ となる.

the Axiom of Multiple Choice の定理 2 と同様である.

有限集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| \geq 2$ 」を満たすとする. これらは互いに素であるとしてよい. $\lambda \in \Lambda$ とする.

$$V_\lambda := \left\{ \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_x x \mid \alpha_x \in \mathbb{Q}, \sum_{x \in X_\lambda} \alpha_x = 0 \right\}$$

とする. V_λ は \mathbb{Q} 上の線型空間で, 明らかに $\dim_{\mathbb{Q}} V_\lambda = |X_\lambda| - 1$ である.

有限次元線型空間では, 選択公理無しに次元が一意に定まることに注意する.

$V := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ と置く. $G_\lambda := \{x - y \in V_\lambda \mid x, y \in X_\lambda, x \neq y\}$, $G := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ とすれば G は V を生成する. 故に仮定から V の基底 $B \subset G$ が存在する. $B_\lambda := B \cap G_\lambda$ と置く. G_λ の定義から, B_λ は $|X_\lambda| - 1$ 個の $x - y$ からなる. そこには X_λ の元が $2(|X_\lambda| - 1)$ 回現れる.

(i) $|X_\lambda| \geq 3$ のとき.

このときは $|X_\lambda|$ が $2(|X_\lambda| - 1)$ を割らないから, 全ての $x \in X_\lambda$ が同じ回数表れるということは無い. そこで $m_\lambda := \min\{x \text{ が現れた回数} \mid x \in X_\lambda\}$ とし $F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid x \text{ が現れた回数} = m_\lambda\}$ と置けばよい.

(ii) $|X_\lambda| = 2$ のとき.

このときは $|B_\lambda| = 1$ である. $B_\lambda = \{b\}$ とする. 今 \mathbb{Q} は標数 0 だから $1 \neq -1$. そこで $F_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid b \text{ に現れる } x \text{ の係数} = 1\}$ と置けばよい.

AMC を示すために, $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする. 各 X_λ は 3 つ以上元を持つとしても一般性を失わない. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し \mathbb{Q} -線型空間 V_λ を

$$V_\lambda := \{f : X_\lambda \rightarrow \mathbb{Q} \mid \text{ある有限集合 } F \subset X_\lambda \text{ があって } f \text{ は } X_\lambda \setminus F \text{ 上定数関数}\}$$

と定義する． $G_\lambda := \{f \in V_\lambda \mid f \text{ は定数関数ではないが一点を除くと定数関数}\}$ と置けば G_λ は V_λ を生成する．

$V := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ とする． $i_\lambda : V_\lambda \hookrightarrow V$ を標準的な埋め込みとして， $G := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} i_\lambda(G_\lambda)$ と置けば G は V を生成する．そこで仮定より V の基底 $B \subset G$ が存在する． $B_\lambda := \{x \in V_\lambda \mid i_\lambda(x) \in B\}$ とすれば $B_\lambda \subset G_\lambda$ が V_λ の基底である．

定数関数 $1 \in V_\lambda$ を基底 B_λ の元 b_i の一次結合で表す： $1 = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$ ． $b_i \in G_\lambda$ で， X_λ は 3 つ以上の元を持つから， $b_i : X_\lambda \rightarrow \mathbb{Q}$ が $X_\lambda \setminus \{x_i\}$ 上定数関数になるような x_i が唯一存在する．そこで $F_\lambda := \{x_1, \dots, x_n\}$ とすればよい．

(2 \implies 4) 明らか．

(4 \implies 1) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．各 X_λ は無限集合としても一般性を失わない． $\lambda \in \Lambda$ とする． $V_\lambda := \{f : X_\lambda \rightarrow \mathbb{F}_2 \mid \text{有限個の } x \in X_\lambda \text{ を除いて } f \text{ は定数関数}\} \subset \mathbb{F}_2^{X_\lambda}$ と置く． V_λ は \mathbb{F}_2 -線型空間 $\mathbb{F}_2^{X_\lambda}$ の部分空間である． $x \in X_\lambda$ に対して $f_x, g_x \in V_\lambda$ を

$$f_x(y) := \begin{cases} 1 & (y = x \text{ のとき}) \\ 0 & (y \neq x \text{ のとき}) \end{cases}, \quad g_x(y) := \begin{cases} 0 & (y = x \text{ のとき}) \\ 1 & (y \neq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める． $V := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ とする． $G := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{x \in X_\lambda} \{f_x, g_x\}$ は V の生成系である．故に仮定 4 から V の基底 $B \subset G$ が存在する．

$\lambda \in \Lambda$ を取る． $f_{x_\lambda} \in B$ かつ $g_{x_\lambda} \in B$ となるような $x_\lambda \in X_\lambda$ が一意に存在する．

∴ $1_\lambda \in V_\lambda$ を任意の $x \in X_\lambda$ に対して $1_\lambda(x) := 1$ で定める． B が V の基底だから $e^{(0)}, \dots, e^{(n_\lambda)} \in B$ が一意に存在して $1_\lambda = e^{(0)} + \dots + e^{(n_\lambda)}$ と書ける． $e^{(i)} \in V$ の V_λ 成分を $e_\lambda^{(i)}$ と書く． $I := \{0 \leq i \leq n_\lambda \mid e_\lambda^{(i)} \text{ は無限個の } x \in X_\lambda \text{ に対して } 1 \text{ を取る}\}$ と置く．

$|I|$ が偶数だとすると $\sum_{i \in I} e_\lambda^{(i)}$ は有限個の $x \in X_\lambda$ を除いて 0 を取る．故に $1_\lambda \in V_\lambda$ は有限個の $x \in X_\lambda$ を除いて 0 を取る．今 1_λ は $x \in X_\lambda$ に対して 1 を取るから， X_λ は有限集合で無ければならず，矛盾する．従って $|I|$ は奇数である．

このとき $\sum_{i \in I} e_\lambda^{(i)}$ は有限個の $x \in X_\lambda$ を除いて 1 を取る． $Y_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid \sum_{i \in I} e_\lambda^{(i)}(x) = 0\}$ と置く． $x_\lambda \in Y_\lambda$ を一つ取る．今， $|I|$ は奇数だったから，ある $j \in I$ が存在して $l_\lambda^{(j)}(x_\lambda) = 0$ となる． $j = 0$ としてよい．このとき， G の定義から明らかに $e_\lambda^{(0)} = g_{x_\lambda}$ である．故に $n = 1$ かつ $e_\lambda^{(1)} = f_{x_\lambda}$ となることが分かる．即ち $f_{x_\lambda} \in B$ かつ $g_{x_\lambda} \in B$ である．このとき $1_\lambda = f_{x_\lambda} + g_{x_\lambda}$ だから，表現の一意性により，このような x_λ は唯一つしか存在しない．

この x_λ を使って $f : \Lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を $f(\lambda) := x_\lambda$ と定めれば, f が選択関数である. □

2 \implies 1 の証明については, 簡明な証明が知られています. かがみさんの日記の線型空間の基底の存在と選択公理 (簡単な場合) を参照.

定義. V を集合, \in を $\mathcal{P}(V)$ 上の二項関係とする. 小文字 x, y は V の元を動き, 大文字 X, Y, Z は V の部分集合を動くとする. 次の条件を満たすとき, (V, \in) を一般化線型空間と呼ぶことにする.

1. $Y \subset X$ ならば $Y \in X$.
2. 「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $X_\lambda \in Y$ 」ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in Y$.
3. $X \in Y$ かつ $Y \in Z$ ならば $X \in Z$.
4. $\{x\} \in X \cup \{y\}$ かつ $\{x\} \notin X$ ならば $\{y\} \in X \cup \{x\}$.
5. $\{x\} \in X$ ならば, ある有限部分集合 $Y \subset X$ が存在して $\{x\} \in Y$.

定義. (V, \in) を一般化線型空間とする.

1. $X \subset V$ が独立 $\iff \{x\} \in X \setminus \{x\}$ となる $x \in X$ は存在しない.
2. $B \subset V$ が基底 $\iff B$ が独立でありかつ $V \in B$.

定理 3. 選択公理 \iff 任意の一般化線型空間に基底が存在する.

証明. (\implies) V を一般化線型空間とする. $\mathcal{A} := \{X \subset V \mid X \text{ は独立}\}$ は有限性を持つ.

∴) X が独立であるとする. 有限部分集合 $Y \subset X$ が独立でないとは定する. ある $y \in Y$ が存在して $\{y\} \in Y \setminus \{y\}$ となる. $Y \setminus \{y\} \subset X \setminus \{y\}$ だから一般化線型空間の定義の 1 により $Y \setminus \{y\} \in X \setminus \{y\}$ である. 故に定義の 3 から $\{y\} \in X \setminus \{y\}$ となり, X が独立であることに矛盾する. 故に任意の有限部分集合 $Y \subset X$ は独立である.

逆に, 任意の有限部分集合 $Y \subset X$ が独立であるとする. X が独立でないとは定する. ある $x \in X$ が存在して $\{x\} \in X \setminus \{x\}$ となる. このとき定義の 5 から, ある有限部分集合 $Z \subset X \setminus \{x\}$ が存在して $\{x\} \in Z$ である. このとき $Y := Z \cup \{x\}$ と置けば $\{x\} \in Y \setminus \{x\}$ となり, 有限部分集合 $Y \subset X$ が独立であることに矛盾する. 故に X は独立である.

従って Tukey の補題により \mathcal{A} は \subset に関する極大元 $B \in \mathcal{A}$ を持つ. B が基底でないと

する。\$B\$ は独立だから、\$V \notin B\$ である。\$V = \bigcup_{x \in V} \{x\}\$ だから、一般化線型空間の定義の 2 によりある \$x \in V\$ が存在して \$\{x\} \notin B\$ となる。\$\bar{B} := B \cup \{x\}\$ と置けば \$\bar{B}\$ は独立である。

∴) \$\bar{B}\$ が独立でないと仮定するとある \$y \in \bar{B}\$ が存在して \$\{y\} \in \bar{B} \setminus \{y\}\$ である。\$\{x\} \notin B\$ だから \$y \neq x\$、よって \$y \in B\$ である。\$B\$ は独立だから \$\{y\} \notin B \setminus \{y\}\$ となる。\$\{y\} \in \bar{B} \setminus \{y\} = (B \setminus \{y\}) \cup \{x\}\$ だから定義の 4 により \$\{x\} \in (B \setminus \{y\}) \cup \{y\} = B\$ となり矛盾する。

故に \$B\$ の極大性に矛盾する。従って \$B\$ は基底である。

(⇐) \$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\$ を互いに素な非空集合の族とする。\$V := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\$ として \$\in\$ を

$$X \in Y \iff \text{任意の } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } X \cap X_\lambda \neq \emptyset \text{ ならば } Y \cap X_\lambda \neq \emptyset$$

と定める。\$(V, \in)\$ は一般化線型空間である。

∴) 一般化線型空間の定義 1 から 5 を確かめる。1, 2, 3 は明らかである。
 4 について、\$\{x\} \in X \cup \{y\}\$ かつ \$\{x\} \notin X\$ とする。\$x \in V\$ だから、ある \$\lambda \in \Lambda\$ が一意に存在して \$x \in X_\lambda\$ である。即ち \$\{x\} \cap X_\lambda \neq \emptyset\$ である。任意の \$\mu \neq \lambda\$ に対して \$\{x\} \cap X_\mu = \emptyset\$ だから、\$\{x\} \notin X\$ となるためには \$X \cap X_\lambda = \emptyset\$ でなければならない。一方、\$\{x\} \in X \cup \{y\}\$ の定義と \$\{x\} \cap X_\lambda \neq \emptyset\$ から \$(X \cup \{y\}) \cap X_\lambda \neq \emptyset\$ である。故に \$y \in X_\lambda\$ となる。従って \$\{y\} \in X \cup \{x\}\$ が分かる。
 5 について、\$\{x\} \in X\$ とする。\$x \in V\$ だから、ある \$\lambda \in \Lambda\$ が一意に存在して \$x \in X_\lambda\$ である。\$y \in X \cap X_\lambda\$ を一つ取る。このとき \$Y := \{y\}\$ とすれば明らかに \$\{x\} \in Y\$ となる。

よって仮定により \$V\$ の基底 \$B\$ が存在する。\$V \in B\$ だから、任意の \$\lambda \in \Lambda\$ に対して \$B \cap X_\lambda \neq \emptyset\$ である。\$x, y \in B \cap X_\lambda\$ とする。基底 \$B\$ は独立だから \$\{x\} \notin B \setminus \{x\}\$ である。\$\{x\} \cap X_\lambda \neq \emptyset\$、任意の \$\mu \neq \lambda\$ に対して \$\{x\} \cap X_\mu = \emptyset\$ だから、\$\{x\} \notin B \setminus \{x\}\$ となるためには \$(B \setminus \{x\}) \cap X_\lambda = \emptyset\$ でなければならない。\$y \in B \cap X_\lambda\$ だったから \$x = y\$ である。従って、\$|B \cap X_\lambda| = 1\$ が分かった。故に \$B\$ が \$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}\$ の選択集合である。□

参考文献

- [1] A. Blass, Existence of bases implies the Axiom of Choice, Contemporary Mathematics 31 (1984), 31–33, <http://www.math.lsa.umich.edu/~ablass/set.html>

- [2] M. Bleicher, Some theorems on Vector Spaces and the Axiom of Choice, *Fund. Math.* 54(1964), 95–107, <http://matwbn.icm.edu.pl/tresc.php?wyd=1&tom=54>
- [3] Horst Herrlich, *Axiom of Choice* , Springer, 2006